



UNIVERSITE  
CHAMBERY  
ANNECY **DE SAVOIE**



# Modélisation, analyse mathématique et numérique de divers écoulements compressibles ou incompressibles en couche mince.

**M. Ersoy**

LAMA-Université de Savoie

10 septembre 2010

- ① EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- ② ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- ③ APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- ④ QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- ⑤ CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# DYNAMIQUE DE L'ATMOSPHÈRE

- Dynamique :

- ▶ Fluide compressible
- ▶ Faible extension verticale
- ▶ Mouvements principalement horizontaux
- ▶ Fortement stratifiés en densité



# DYNAMIQUE DE L'ATMOSPHÈRE

- Dynamique :
  - ▶ **Fluide compressible**
  - ▶ Faible extension verticale
  - ▶ Mouvements principalement horizontaux
  - ▶ Fortement stratifiés en densité
- **Modélisation** : Équations de Navier-Stokes **compressibles**  
Approximation hydrostatique → Équations primitives compressibles

# DYNAMIQUE DE L'ATMOSPHÈRE

- Dynamique :
  - ▶ Fluide compressible
  - ▶ Faible extension verticale
  - ▶ Mouvements principalement horizontaux
  - ▶ Fortement stratifiés en densité
- Modélisation : Équations de Navier-Stokes compressibles  
Approximation hydrostatique → Équations primitives compressibles

- **Dynamique :**
  - ▶ Fluide compressible
  - ▶ Faible extension verticale
  - ▶ Mouvements principalement horizontaux
  - ▶ **Fortement stratifiés en densité**
- **Modélisation :** Équations de Navier-Stokes compressibles  
Approximation hydrostatique → Équations primitives compressibles
- **Résultats mathématiques :**
  - ▶ **Existence** de solutions faibles globales en temps du modèle en dimension 2
  - ▶ **Stabilité** de solutions faibles en temps du modèle en dimension 3



*M. Ersoy and T. Ngom*

Existence of a global weak solution to one model of Compressible Primitive Equations.

Submitted, available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00487370/fr/>, 2010.

*M. Ersoy, T. Ngom and M. Sy*

Compressible Primitive Equations : formal derivation and stability of weak solutions.

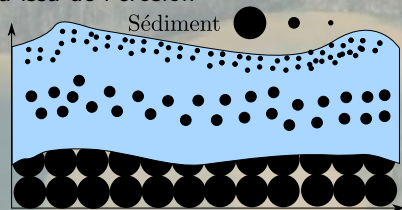
Submitted, available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00488398/fr/>, 2010.





# SÉDIMENTATION

- **Sédiment** : Matériau issu de l'érosion

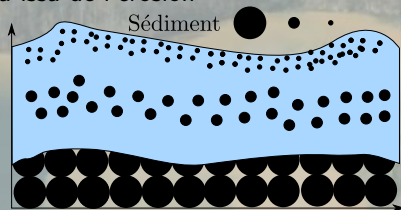


- **Dynamique** :
  - ▶ Fluide incompressible
  - ▶ Faible extension verticale
  - ▶ Mouvements principalement horizontaux



# SÉDIMENTATION

- **Sédiment** : Matériau issu de l'érosion



- **Dynamique** :

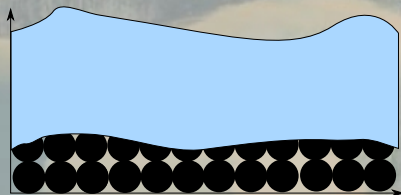
- ▶ Fluide incompressible
- ▶ Faible extension verticale
- ▶ Mouvements principalement horizontaux

- **Modélisation** : **Équations de Saint-Venant-Exner**

- ▶ Partie hydrodynamique → Équations de Saint-Venant
- ▶ Partie morphodynamique → Équation d'Exner

# SÉDIMENTATION

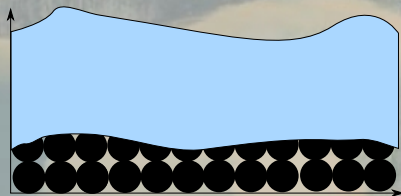
- **Sédiment** : Matériau issu de l'érosion



- **Dynamique** :
  - ▶ **Fluide incompressible**
  - ▶ **Faible extension verticale**
  - ▶ **Mouvements principalement horizontaux**
- **Modélisation** : Équations de Saint-Venant-Exner
  - ▶ **Partie hydrodynamique** → **Équations de Saint-Venant**
  - ▶ **Partie morphodynamique** → **Équation d'Exner**

# SÉDIMENTATION

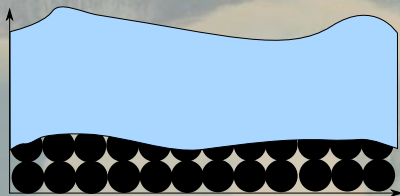
- **Sédiment** : Matériau issu de l'érosion



- **Dynamique** :
  - ▶ Fluide incompressible
  - ▶ Faible extension verticale
  - ▶ Mouvements principalement horizontaux
  - ▶ **Fond variable, exemple : nid d'une rivière**
- **Modélisation** : Équations de Saint-Venant-Exner
  - ▶ Partie hydrodynamique → Équations de Saint-Venant
  - ▶ Partie morphodynamique → **Équation d'Exner**

# SÉDIMENTATION

- **Sédiment** : Matériau issu de l'érosion



- **Dynamique** :
  - ▶ Fluide incompressible
  - ▶ Faible extension verticale
  - ▶ Mouvements principalement horizontaux
- **Modélisation** : Équations de Saint-Venant-Exner
  - ▶ Partie hydrodynamique → Équations de Saint-Venant
  - ▶ Partie morphodynamique → Équation d'Exner
- **Résultats numériques** :
  - ▶ Hauteur de la couche de sédiments et de la surface libre



*M. Ersoy and T. Ngom*

Dérivation formelle des équations de type Saint-Venant-Exner.

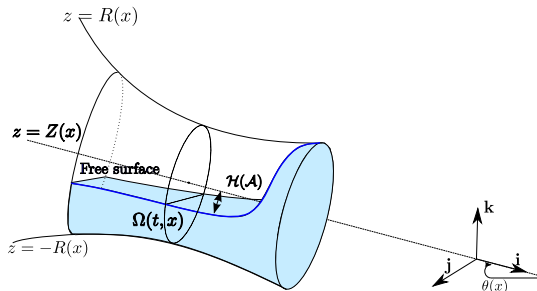
*In preparation*

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# QU'EST CE QU'UN ÉCOULEMENT TRANSITOIRE MIXTE EN CONDUITE FERMÉE ?

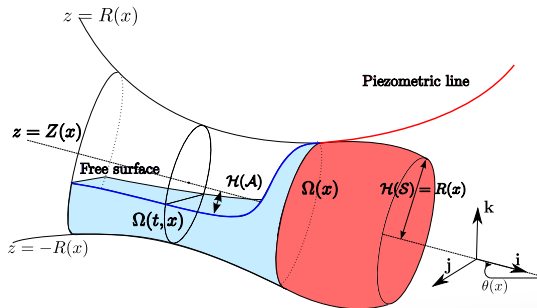
- Zone en Surface Libre (SL)

Section non complètement pleine et écoulement **incompressible**...



# QU'EST CE QU'UN ÉCOULEMENT TRANSITOIRE MIXTE EN CONDUITE FERMÉE ?

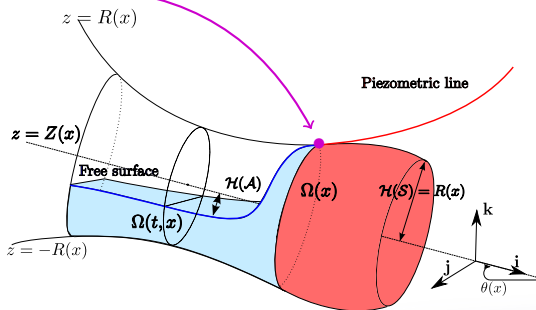
- Zone en Surface Libre (SL)  
Section non complètement pleine et écoulement incompressible...
- Zone en CHarge (CH)  
Section complètement pleine et écoulement **compressible**...





# QU'EST CE QU'UN ÉCOULEMENT TRANSITOIRE MIXTE EN CONDUITE FERMÉE ?

- Zone en Surface Libre (SL)  
Section non complètement pleine et écoulement incompressible. . .
- Zone en CHarge (CH)  
Section complètement pleine et écoulement compressible. . .
- **Point de transition**



# QUELQUES EXEMPLES DE CONDUITES



Le tunnel Orange-Fish



Des égouts ... à Paris



Une conduite forcée



Et quand ça ne va plus ... au Minnesota  
<http://www.sewerhistory.org/grfx/misc/disaster.htm>

- ① EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- ② ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
    - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
    - Relation de couplage : le modèle PFS
- ③ APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- ④ QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- ⑤ CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# TRAVAUX ANTÉRIEURS

POUR LES ÉCOULEMENTS EN SURFACE LIBRE :

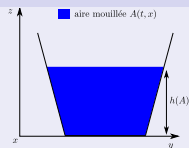
## GÉNÉRALEMENT

les équations de **Saint-Venant** en canal :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1(A) \right) = 0 \end{cases}$$

avec

$A(t, x)$	:	aire mouillée
$Q(t, x)$	:	débit
$I_1(A)$	:	pression hydrostatique
$g$	:	gravité



## Avantage

- Formulation conservative → Mise en oeuvre numérique simple



Hamam et McCorquodale (82), Trieu Dong (91), Musandji Fuamba (02), Vasconcelos *et al* (06)

# TRAVAUX ANTÉRIEURS

POUR LES ÉCOULEMENTS EN CHARGE :

## GÉNÉRALEMENT

les équations d'Allievi :

$$\begin{cases} \partial_t p + \frac{c^2}{gS} \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + gS \partial_x p = 0 \end{cases}$$

avec

$p(t, x)$	:	pression
$Q(t, x)$	:	débit
$c(t, x)$	:	vitesse d'onde
$S(x)$	:	section

## Avantage

- Prise en compte de la compressibilité de l'eau  $\Rightarrow$  Bon calcul des surpressions et dépressions

## Inconvénient

- Formulation non conservative  $\Rightarrow$  Impossibilité de coupler à Saint-Venant



Winckler (93), Blommaert (00)

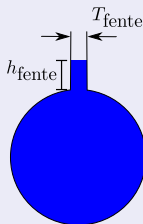
# TRAVAUX ANTÉRIEURS

POUR LES ÉCOULEMENTS MIXTES :

## GÉNÉRALEMENT

les équations de Saint-Venant avec fente de Preissmann :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1(A) \right) = 0 \end{cases}$$



## Avantage

- Un seul modèle pour les deux écoulements

## Inconvénient

- Fluide incompressible  $\implies$  Coup de bélier mal calculé
- Vitesse d'onde en charge  $\simeq \sqrt{S/T_{fente}} \implies$  Il faut ajuster  $T_{fente}$
- Dépression  $\implies$  Vue comme un passage en surface libre



Preissmann (61), Cunge *et al.* (65), Baines *et al.* (92), Garcia-Navarro *et al.* (94), Capart *et al.* (97), Tseng (99)

## NOTRE OBJECTIF :

- Utiliser les équations de Saint-Venant pour un écoulement à surface libre



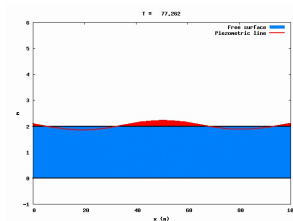
# NOTRE OBJECTIF :

- Utiliser les équations de Saint-Venant pour un écoulement à surface libre
- Écrire un modèle en charge
  - ▶ qui prend en compte la compressibilité de l'eau
  - ▶ qui prend en compte les dépressions
  - ▶ similaire aux équations de Saint-Venant

# NOTRE OBJECTIF :

- Utiliser les équations de Saint-Venant pour un écoulement à surface libre
- Écrire un modèle en charge
  - ▶ qui prend en compte la compressibilité de l'eau
  - ▶ qui prend en compte les dépressions
  - ▶ similaire aux équations de Saint-Venant
- Obtenir un modèle pour les écoulements mixtes

Pour pouvoir simuler, par exemple :



C. Bourdarias and S. Gerbi

A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes.  
*J. Comp. Appl. Math.*, 209(1) :109–131, 2007.

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# DÉRIVATION DU MODÈLE À SURFACE LIBRE

## ÉQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLES 3D

$$\begin{aligned}\rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{U}) &= 0 \\ \rho_0 (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \nabla p &= \rho_0 F\end{aligned}$$

### Méthode :

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{U^2} \approx \overline{U} \overline{U}$  et  $\overline{UV} \approx \overline{U} \overline{V}$ .
- 4 On introduit  $A_{sl}(t, x)$  : l'aire mouillée,  $Q_{sl}(t, x)$  le débit définis par :

$$A_{sl}(t, x) = \int_{\Omega(t, x)} dydz, \quad Q_{sl}(t, x) = A_{sl}(t, x)u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{A_{sl}(t, x)} \int_{\Omega(t, x)} U(t, x) dydz$$

# DÉRIVATION DU MODÈLE À SURFACE LIBRE

## ÉQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLES 3D

$$\begin{aligned}\rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{U}) &= 0 \\ \rho_0 (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \nabla p &= \rho_0 F\end{aligned}$$

### Méthode :

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{U^2} \approx \overline{U} \overline{U}$  et  $\overline{UV} \approx \overline{U} \overline{V}$ .
- 4 On introduit  $A_{sl}(t, x)$  : l'aire mouillée,  $Q_{sl}(t, x)$  le débit définis par :

$$A_{sl}(t, x) = \int_{\Omega(t, x)} dydz, \quad Q_{sl}(t, x) = A_{sl}(t, x)u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{A_{sl}(t, x)} \int_{\Omega(t, x)} U(t, x) dydz$$



J.-F. Gerbeau, B. Perthame

Derivation of viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Numerical Validation.  
*Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B, Vol. 1, Num. 1, 89–102, 2001.*



F. Marche

Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects.  
*European Journal of Mechanic B/Fluid, 26 (2007), 49–63.*

# DÉRIVATION DU MODÈLE À SURFACE LIBRE

## ÉQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLES 3D

$$\begin{aligned}\rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{U}) &= 0 \\ \rho_0 (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \nabla p &= \rho_0 F\end{aligned}$$

### Méthode :

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{U^2} \approx \overline{U} \overline{U}$  et  $\overline{UV} \approx \overline{U} \overline{V}$ .
- 4 On introduit  $A_{sl}(t, x)$  : l'aire mouillée,  $Q_{sl}(t, x)$  le débit définis par :

$$A_{sl}(t, x) = \int_{\Omega(t, x)} dydz, \quad Q_{sl}(t, x) = A_{sl}(t, x)u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{A_{sl}(t, x)} \int_{\Omega(t, x)} U(t, x) dydz$$

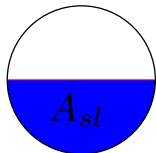
# DÉRIVATION DU MODÈLE À SURFACE LIBRE

## ÉQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLES 3D

$$\begin{aligned}\rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{U}) &= 0 \\ \rho_0 (\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \nabla p &= \rho_0 F\end{aligned}$$

### Méthode :

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{U^2} \approx \overline{U} \overline{U}$  et  $\overline{UV} \approx \overline{U} \overline{V}$ .
- 4 On introduit  $A_{sl}(t, x)$  : l'aire mouillée,  $Q_{sl}(t, x)$  le débit définis par :



$$A_{sl}(t, x) = \int_{\Omega(t, x)} dydz, \quad Q_{sl}(t, x) = A_{sl}(t, x)u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{A_{sl}(t, x)} \int_{\Omega(t, x)} U(t, x) dydz$$



# LE MODÈLE À SURFACE LIBRE

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left( \frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -g A_{sl} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) - G(x, A_{sl}) \end{array} \right.$$

avec

$$p_{sl} = g I_1(x, A_{sl}) \cos \theta \quad : \text{loi de pression hydrostatique}$$

$$Pr_{sl} = g I_2(x, A_{sl}) \cos \theta \quad : \text{terme source de pression}$$

$$G = g A_{sl} \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \quad : \text{terme de courbure}$$

# LE MODÈLE À SURFACE LIBRE

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left( \frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -g A_{sl} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) - G(x, A_{sl}) \\ \quad - \underbrace{gK(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}}}_{\text{friction ajoutée après calcul}} \end{array} \right.$$

avec

$$p_{sl} = gI_1(x, A_{sl}) \cos \theta \quad : \text{loi de pression hydrostatique}$$

$$Pr_{sl} = gI_2(x, A_{sl}) \cos \theta \quad : \text{terme source de pression}$$

$$G = g A_{sl} \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \quad : \text{terme de courbure}$$

$$K = \frac{1}{K_s^2 R_h(A_{sl})^{4/3}} \quad : \text{loi de Manning-Strickler}$$

# DÉRIVATION DU MODÈLE EN CHARGE

ÉQUATIONS D'EULER COMPRESSIBLES 3D ISENTROPIQUE

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p = \rho \mathbf{F}$$

avec

$$p = p_a + \frac{\rho - \rho_0}{c^2} \text{ avec } c \text{ vitesse d'onde}$$

**Méthode :**

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{\rho U} \approx \overline{\rho} \overline{U}$  et  $\overline{\rho U^2} \approx \overline{\rho} \overline{U} \overline{U}$ .
- 4 On introduit  $A_{ch}(t, x)$  : l'aire mouillée équivalente,  $Q_{ch}(t, x)$  le débit définis par :

$$A_{ch}(t, x) = \frac{\overline{\rho}}{\rho_0} S(x), \quad Q_{ch}(t, x) = A_{ch}(t, x) u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{S(x)} \int_{\Omega(x)} U(t, x) \, dydz$$

# DÉRIVATION DU MODÈLE EN CHARGE

ÉQUATIONS D'EULER COMPRESSIBLES 3D ISENTROPIQUE

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p = \rho \mathbf{F}$$

avec

$$p = p_a + \frac{\rho - \rho_0}{c^2} \text{ avec } c \text{ vitesse d'onde}$$

**Méthode :**

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{\rho U} \approx \bar{\rho} \bar{U}$  et  $\overline{\rho U^2} \approx \bar{\rho} \bar{U} \bar{U}$ .
- 4 On introduit  $A_{ch}(t, x)$  : l'aire mouillée équivalente,  $Q_{ch}(t, x)$  le débit définis par :

$$A_{ch}(t, x) = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} S(x), \quad Q_{ch}(t, x) = A_{ch}(t, x) u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{S(x)} \int_{\Omega(x)} U(t, x) \, dydz$$

# DÉRIVATION DU MODÈLE EN CHARGE

ÉQUATIONS D'EULER COMPRESSIBLES 3D ISENTROPIQUE

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p = \rho \mathbf{F}$$

avec

$$p = p_a + \frac{\rho - \rho_0}{c^2} \text{ avec } c \text{ vitesse d'onde}$$

**Méthode :**

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{\rho U} \approx \bar{\rho} \bar{U}$  et  $\overline{\rho U^2} \approx \bar{\rho} \bar{U} \bar{U}$ .
- 4 On introduit  $A_{ch}(t, x)$  : l'aire mouillée équivalente,  $Q_{ch}(t, x)$  le débit définis par :

$$A_{ch}(t, x) = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} S(x), \quad Q_{ch}(t, x) = A_{ch}(t, x) u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{S(x)} \int_{\Omega(x)} U(t, x) \, dydz$$

# DÉRIVATION DU MODÈLE EN CHARGE

ÉQUATIONS D'EULER COMPRESSIBLES 3D ISENTROPIQUE

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0$$

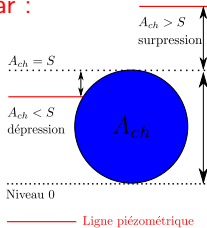
$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p = \rho \mathbf{F}$$

avec

$$p = p_a + \frac{\rho - \rho_0}{c^2} \text{ avec } c \text{ vitesse d'onde}$$

**Méthode :**

- 1 On écrit les équations d'Euler en coordonnées curvilinéaires.
- 2 On adimensionnalise en introduisant le paramètre  $\epsilon = H/L$  et on prend  $\epsilon = 0$ .
- 3 On intègre le long de la section verticale avec  $\overline{\rho U} \approx \overline{\rho} \overline{U}$  et  $\overline{\rho U^2} \approx \overline{\rho} \overline{U} \overline{U}$ .
- 4 On introduit  $A_{ch}(t, x)$  : l'aire mouillée équivalente,  $Q_{ch}(t, x)$  le débit définis par :



$$A_{ch}(t, x) = \frac{\overline{\rho}}{\rho_0} S(x), \quad Q_{ch}(t, x) = A_{ch}(t, x) u(t, x)$$

$$u(t, x) = \frac{1}{S(x)} \int_{\Omega(x)} U(t, x) dy dz$$

# LE MODÈLE EN CHARGE

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left( \frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -g A_{ch} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) - G(x, A_{ch}) \end{array} \right.$$

avec

$$p_{ch} = c^2(A_{ch} - S) \quad : \text{loi de pression acoustique}$$

$$Pr_{ch} = c^2 \left( \frac{A_{ch}}{S} - 1 \right) \frac{dS}{dx} \quad : \text{terme source de pression}$$

$$G = g A_{ch} \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \quad : \text{terme de courbure}$$



# LE MODÈLE EN CHARGE

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left( \frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -g A_{ch} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) - G(x, A_{ch}) \\ \quad - \underbrace{gK(x, S) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}}}_{\text{friction ajoutée après calcul}} \end{array} \right.$$

avec

$$p_{ch} = c^2(A_{ch} - S) \quad : \text{loi de pression acoustique}$$

$$Pr_{ch} = c^2 \left( \frac{A_{ch}}{S} - 1 \right) \frac{dS}{dx} \quad : \text{terme source de pression}$$

$$G = g A_{ch} \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \quad : \text{terme de courbure}$$

$$K = \frac{1}{K_s^2 R_h (S)^{4/3}} \quad : \text{loi de Manning-Strickler}$$

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# LE MODÈLE PFS

DES MODÈLES FORMELLEMENT TRÈS PROCHES ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left( \frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -g A_{sl} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) \\ \quad - G(x, A_{sl}) \\ \quad - gK(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left( \frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -g A_{ch} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) \\ \quad - G(x, A_{ch}) \\ \quad - gK(x, S) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}} \end{array} \right.$$

# LE MODÈLE PFS

DES MODÈLES FORMELLEMENT TRÈS PROCHES ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left( \frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -g A_{sl} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) \\ \quad - G(x, A_{sl}) \\ \quad - gK(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}} \end{array} \right.$$
  
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left( \frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -g A_{ch} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) \\ \quad - G(x, A_{ch}) \\ \quad - gK(x, S) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}} \end{array} \right.$$

## Critère de continuité

# LE MODÈLE PFS

DES MODÈLES FORMELLEMENT TRÈS PROCHES ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left( \frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -g \underbrace{A_{sl}}_{\text{green}} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) \\ \quad - G(x, \underbrace{A_{sl}}_{\text{green}}) \\ \quad - gK(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}} \end{array} \right.$$
  
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left( \frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -g \underbrace{A_{ch}}_{\text{green}} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) \\ \quad - G(x, \underbrace{A_{ch}}_{\text{green}}) \\ \quad - gK(x, S) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}} \end{array} \right.$$

Critère « mixte »

# LE MODÈLE PFS

DES MODÈLES FORMELLEMENT TRÈS PROCHES ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left( \frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) \end{array} \right. = 0, \quad \begin{array}{l} -g A_{sl} \frac{dZ}{dx} - Pr_{sl}(x, A_{sl}) \\ -G(x, A_{sl}) \\ -gK(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}} \end{array}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left( \frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) \end{array} \right. = 0, \quad \begin{array}{l} -g A_{ch} \frac{dZ}{dx} - Pr_{ch}(x, A_{ch}) \\ -G(x, A_{ch}) \\ -gK(x, S) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}} \end{array}$$

A coupler

# LE MODÈLE PFS

LA VARIABLE « MIXTE »

On introduit l'indicateur d'état

$$E = \begin{cases} 1 & \text{si l'écoulement est en charge (CH),} \\ 0 & \text{si l'écoulement est à surface libre (SL)} \end{cases}$$

# LE MODÈLE PFS

LA VARIABLE « MIXTE »

On introduit l'indicateur d'état

$$E = \begin{cases} 1 & \text{si l'écoulement est en charge (CH),} \\ 0 & \text{si l'écoulement est à surface libre (SL)} \end{cases}$$

et la section d'eau physique  $\mathbf{S}$  par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(A_{sl}, E) = \begin{cases} S & \text{si } E = 1, \\ A_{sl} & \text{si } E = 0. \end{cases}$$



# LE MODÈLE PFS

## LA VARIABLE « MIXTE »

On introduit l'indicateur d'état

$$E = \begin{cases} 1 & \text{si l'écoulement est en charge (CH),} \\ 0 & \text{si l'écoulement est à surface libre (SL)} \end{cases}$$

et la section d'eau physique  $\mathbf{S}$  par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(A_{sl}, E) = \begin{cases} S & \text{si } E = 1, \\ A_{sl} & \text{si } E = 0. \end{cases}$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{S}(A_{sl}, 0) = A_{sl} & \text{si SL} \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \mathbf{S}(A_{sl}, 1) = A_{ch} & \text{si CH} \end{cases} : \text{ la variable « mixte »} \\ Q &= Au && : \text{ le débit} \end{aligned}$$

# LE MODÈLE PFS

LA VARIABLE « MIXTE »

On introduit l'indicateur d'état

$$E = \begin{cases} 1 & \text{si l'écoulement est en charge (CH),} \\ 0 & \text{si l'écoulement est à surface libre (SL)} \end{cases}$$

et la section d'eau physique  $\mathbf{S}$  par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(A_{sl}, E) = \begin{cases} S & \text{si } E = 1, \\ A_{sl} & \text{si } E = 0. \end{cases}$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{S}(A_{sl}, 0) = A_{sl} & \text{si SL} \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \mathbf{S}(A_{sl}, 1) = A_{ch} & \text{si CH} \end{cases} : \text{ la variable « mixte »} \\ Q &= Au && : \text{ le débit} \end{aligned}$$

## Continuité de $\mathbf{S}$ au point de transition

# LE MODÈLE PFS

## CONSTRUCTION DE LA PRESSION « MIXTE »

- Continuité de  $\mathbf{S} \implies$  continuité de  $p$  au point de transition

→

$$p(x, A, E) = c^2(A - \mathbf{S}) + gI_1(x, \mathbf{S}) \cos \theta$$

# LE MODÈLE PFS

## CONSTRUCTION DE LA PRESSION « MIXTE »

- Continuité de  $\mathbf{S}$   $\implies$  continuité de  $p$  au point de transition

$\longrightarrow$

$$p(x, A, E) = c^2(A - \mathbf{S}) + gI_1(x, \mathbf{S}) \cos \theta$$

- Même construction pour le terme source de pression :

$$Pr(x, A, E) = c^2 \left( \frac{A}{\mathbf{S}} - 1 \right) \frac{dS}{dx} + gI_2(x, \mathbf{S}) \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(A) + \partial_x(Q) \\ \partial_t(Q) + \partial_x \left( \frac{Q^2}{A} + p(x, A, E) \right) \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = -g A \frac{d}{dx} Z(x) \\ + Pr(x, A, E) \\ -G(x, A, E) \\ -g K(x, \mathbf{S}) \frac{Q|Q|}{A} \end{array}$$



*C. Bourdarias, M. Ersoy and S. Gerbi*

A model for unsteady mixed flows in non uniform closed water pipes and a well-balanced finite volume scheme.  
*Int. J. On Finite Volumes*, 6(2) :1-47, 2009.

# LES ÉQUATIONS PFS

## PROPRIÉTÉS MATHÉMATIQUES

- Le système PFS est **strictement hyperbolique** pour  $A(t, x) > 0$ .
- Pour des solutions régulières, la vitesse moyenne  $u = Q/A$  satisfait

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + c^2 \ln(A/S) + g \mathcal{H}(S) \cos \theta + g Z \right) = -g K(x, \mathbf{S}) u |u|$$

et pour  $u = 0$ , on a :

$$c^2 \ln(A/\mathbf{S}) + g \mathcal{H}(\mathbf{S}) \cos \theta + g Z = cte$$

où  $\mathcal{H}(\mathbf{S})$  est la hauteur d'eau physique.

- Il admet une **entropie mathématique**

$$E(A, Q, S) = \frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/\mathbf{S}) + c^2 S + g \bar{Z}(x, \mathbf{S}) \cos \theta + g A Z$$

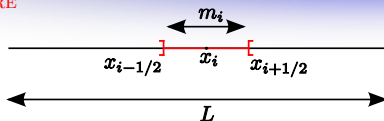
qui satisfait l'inégalité

$$\partial_t E + \partial_x (E u + p(x, A, E) u) = -g A K(x, \mathbf{S}) u^2 |u| \leq 0$$

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# SCHÉMA NUMÉRIQUE VOLUMES FINIS (VF) D'ORDRE 1

SCHÉMA NUMÉRIQUE CENTRÉ



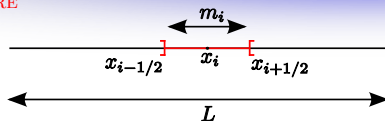
Les équations PFS sous forme vectorielle sont :

$$\partial_t \mathbf{U}(t, x) + \partial_x F(x, \mathbf{U}) = \mathcal{S}(t, x)$$



# SCHÉMA NUMÉRIQUE VOLUMES FINIS (VF) D'ORDRE 1

SCHÉMA NUMÉRIQUE CENTRÉ



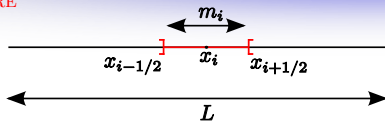
Les équations PFS sous forme vectorielle sont :

$$\partial_t \mathbf{U}(t, x) + \partial_x F(x, \mathbf{U}) = \mathcal{S}(t, x)$$

Avec  $\mathbf{U}_i^n$  cte par maille  $\approx \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{U}(t_n, x) dx$  et  $\mathcal{S}(t, x)$  constant par maille,

# SCHÉMA NUMÉRIQUE VOLUMES FINIS (VF) D'ORDRE 1

SCHÉMA NUMÉRIQUE CENTRÉ



Les équations PFS sous forme vectorielle sont :

$$\partial_t \mathbf{U}(t, x) + \partial_x F(x, \mathbf{U}) = \mathcal{S}(t, x)$$

Avec  $\mathbf{U}_i^n$  cte par maille  $\approx \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{U}(t_n, x) dx$  et  $\mathcal{S}(t, x)$  constant par maille,

on a un schéma VF centré :

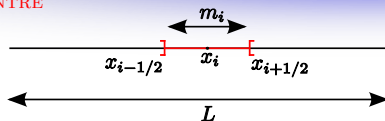
$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}) + \Delta t^n \mathcal{S}(\mathbf{U}_i^n)$$

où

$$\Delta t^n \mathcal{S}_i^n \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{m_i} \mathcal{S}(t, x) dx dt$$

# SCHÉMA NUMÉRIQUE VOLUMES FINIS (VF) D'ORDRE 1

SCHÉMA NUMÉRIQUE DÉCENTRÉ



Les équations PFS sous forme vectorielle sont :

$$\partial_t \mathbf{U}(t, x) + \partial_x F(x, \mathbf{U}) = \mathcal{S}(t, x)$$

Avec  $\mathbf{U}_i^n$  cte par maille  $\approx \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{U}(t_n, x) dx$  et  $\mathcal{S}(t, x)$  constant par maille,

on a un schéma VF décentré :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( \tilde{\mathcal{F}}_{i+1/2} - \tilde{\mathcal{F}}_{i-1/2} \right)$$

# CHOIX DU FLUX NUMÉRIQUE

**Objectif** : définir  $\mathcal{F}_{i+1/2}$  en conservant le plus de propriétés du modèle continu

Positivité de  $A$  ,  
conservativité de  $A$ , équilibres discrets, inégalités d'entropie discrètes

# CHOIX DU FLUX NUMÉRIQUE

**Objectif** : définir  $\mathcal{F}_{i+1/2}$  en conservant le plus de propriétés du modèle continu

Positivité de  $A$  ,

conservativité de  $A$ , équilibres discrets, inégalités d'entropie discrètes

# CHOIX DU FLUX NUMÉRIQUE

**Objectif** : définir  $\mathcal{F}_{i+1/2}$  en conservant le plus de propriétés du modèle continu

Positivité de  $A$  ,

conservativité de  $A$ , équilibres discrets, inégalités d'entropie discrètes

# CHOIX DU FLUX NUMÉRIQUE

**Objectif** : définir  $\mathcal{F}_{i+1/2}$  en conservant le plus de propriétés du modèle continu

Positivité de  $A$  ,  
conservativité de  $A$ , équilibres discrets, inégalités d'entropie discrètes

Notre choix

Solveur  
VFRoe

Solveur  
cinétique

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES



# PRINCIPE

## FONCTION DE DENSITÉ

On introduit

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = 1,$$

# PRINCIPE

## ÉQUILIBRE DE GIBBS

On introduit

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = 1,$$

puis on définit l'équilibre de Gibbs par

$$\mathcal{M}(t, x, \xi) = \frac{A(t, x)}{b(t, x)} \chi\left(\frac{\xi - u(t, x)}{b(t, x)}\right)$$

avec

$$b(t, x) = \begin{cases} \sqrt{g \frac{I_1(x, A)}{A} \cos \theta} & \text{si SL} \\ \sqrt{g \frac{I_1(x, S)}{S} \cos \theta + c^2} & \text{si CH} \end{cases}$$

# PRINCIPE

## RELATIONS MICRO-MACROSCOPIQUES

Comme

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = 1,$$

et

$$\mathcal{M}(t, x, \xi) = \frac{A(t, x)}{b(t, x)} \chi\left(\frac{\xi - u(t, x)}{b(t, x)}\right)$$

alors

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(t, x, \xi) d\xi \\ Q &= \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{M}(t, x, \xi) d\xi \\ \frac{Q^2}{A} + A b^2 &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}(t, x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

# PRINCIPE [P02]

## LA FORMULATION CINÉTIQUE

$(A, Q)$  est solution forte du système PFS ssi  $\mathcal{M}$  satisfait l'équation de transport :

$$\partial_t \mathcal{M} + \xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g \Phi \partial_\xi \mathcal{M} = \mathcal{K}(t, x, \xi)$$

où  $\mathcal{K}(t, x, \xi)$  est un noyau de collision vérifiant p.p.  $(t, x)$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K} d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{K} d\xi = 0$$

et  $\Phi$  correspond aux termes sources.



*B. Perthame.*

Kinetic formulation of conservation laws.

Oxford University Press.

*Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol 21, 2002.*

# PRINCIPE

## LA FORMULATION CINÉTIQUE

$(A, Q)$  est solution forte du système PFS ssi  $\mathcal{M}$  satisfait l'équation de transport :

$$\partial_t \mathcal{M} + \xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g \Phi \partial_\xi \mathcal{M} = \mathcal{K}(t, x, \xi)$$

où  $\mathcal{K}(t, x, \xi)$  est un noyau de collision vérifiant p.p.  $(t, x)$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K} d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{K} d\xi = 0$$

et  $\Phi$  correspond aux termes sources.

Forme générale du terme source :

$$\Phi = \overbrace{\frac{d}{dx} Z}^{\text{conservatif}} + \overbrace{\mathbf{B} \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{W}}^{\text{produit non conservatif}} + \overbrace{K \frac{Q|Q|}{A^2}}^{\text{friction}}$$

avec  $\mathbf{W} = (Z, S, \cos \theta)$

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - **Le schéma cinétique**
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# DISCRÉTISATION DES TERMES SOURCES

- On rappelle  $A, Q$  et  $Z, S, \cos \theta$  constants par maille
- On oublie la friction : « splitting »...

# DISCRÉTISATION DES TERMES SOURCES

- On rappelle  $A, Q$  et  $Z, S, \cos \theta$  constants par maille
- On oublie la friction : « splitting »...

Alors  $\forall (t, x) \in [t_n, t_{n+1}[ \times \overset{\circ}{m}_i$

$$\Phi(t, x) = 0$$

puisque

$$\Phi = \frac{d}{dx} Z + \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{W}$$



# SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

- On rappelle  $A, Q$  et  $Z, S, \cos \theta$  constants par maille
- On oublie la friction : « splitting »...

Alors  $\forall (t, x) \in [t_n, t_{n+1}[ \times \overset{\circ}{m}_i$

$$\Phi(t, x) = 0$$

puisque

$$\Phi = \frac{d}{dx} Z + \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{W}$$



$$\partial_t \mathcal{M} + \xi \cdot \partial_x \mathcal{M} = \mathcal{K}(t, x, \xi)$$

# SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

- On rappelle  $A, Q$  et  $Z, S, \cos \theta$  constants par maille
- On oublie la friction : « splitting »...

Alors  $\forall (t, x) \in [t_n, t_{n+1}[ \times \overset{\circ}{m}_i$

$$\Phi(t, x) = 0$$

puisque

$$\Phi = \frac{d}{dx} Z + \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{W}$$

$\implies$

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \partial_x f & = 0 \\ f(t_n, x, \xi) & = \mathcal{M}(t_n, x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(t_n, x, \xi)}{b(t_n, x, \xi)} \chi \left( \frac{\xi - u(t_n, x, \xi)}{b(t_n, x, \xi)} \right) \end{cases}$$

en négligeant le **terme de collision**

# DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

Sur  $[t_n, t_{n+1}[ \times m_i$ , on a :

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \partial_x f & = 0 \\ f(t_n, x, \xi) & = \mathcal{M}_i^n(\xi) \end{cases}$$

# DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

Sur  $[t_n, t_{n+1}[ \times m_i$ , on a :

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \partial_x f & = 0 \\ f(t_n, x, \xi) & = \mathcal{M}_i^n(\xi) \end{cases}$$

i.e.

$$f_i^{n+1}(\xi) = \mathcal{M}_i^n(\xi) + \xi \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( \mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^-(\xi) - \mathcal{M}_{i-\frac{1}{2}}^+(\xi) \right)$$

# DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

Sur  $[t_n, t_{n+1}] \times m_i$ , on a :

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \partial_x f & = 0 \\ f(t_n, x, \xi) & = \mathcal{M}_i^n(\xi) \end{cases}$$

i.e.

$$f_i^{n+1}(\xi) = \mathcal{M}_i^n(\xi) + \xi \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( \mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^-(\xi) - \mathcal{M}_{i-\frac{1}{2}}^+(\xi) \right)$$

d'où

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} A_i^{n+1} \\ Q_i^{n+1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} f_i^{n+1}(\xi) d\xi$$

# DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

Sur  $[t_n, t_{n+1}] \times m_i$ , on a :

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi \cdot \partial_x f & = 0 \\ f(t_n, x, \xi) & = \mathcal{M}_i^n(\xi) \end{cases}$$

i.e.

$$f_i^{n+1}(\xi) = \mathcal{M}_i^n(\xi) + \xi \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( \mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^-(\xi) - \mathcal{M}_{i-\frac{1}{2}}^+(\xi) \right)$$

ou encore

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( \tilde{\mathcal{F}}_{i+1/2}^- - \tilde{\mathcal{F}}_{i-1/2}^+ \right)$$

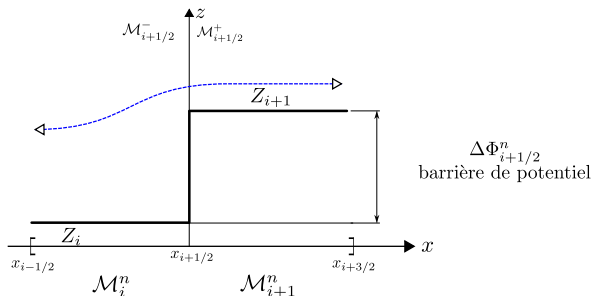
avec

$$\tilde{\mathcal{F}}_{i\pm\frac{1}{2}}^\pm = \int_{\mathbb{R}} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \mathcal{M}_{i\pm\frac{1}{2}}^\pm(\xi) d\xi.$$

# LES FLUX MICROSCOPIQUES

INTERPRÉTATION : BARRIÈRE DE POTENTIEL

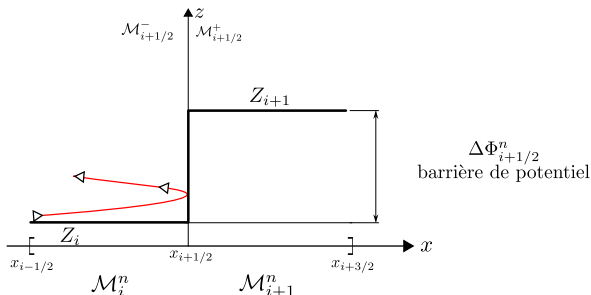
$$\mathcal{M}_{i+1/2}^{-}(\xi) = \overbrace{\mathbb{1}_{\{\xi>0\}} \mathcal{M}_i^n(\xi)}^{\text{transmission positive}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi<0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n > 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n\left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n}\right)}_{\text{transmission négative}}$$



# LES FLUX MICROSCOPIQUES

INTERPRÉTATION : BARRIÈRE DE POTENTIEL

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi) = & \overbrace{\mathbb{1}_{\{\xi>0\}} \mathcal{M}_i^n(\xi)}^{\text{transmission positive}} + \overbrace{\mathbb{1}_{\{\xi<0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi)}^{\text{réflexion}} \\
 & + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi<0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n > 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n\left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n}\right)}_{\text{transmission négative}}
 \end{aligned}$$

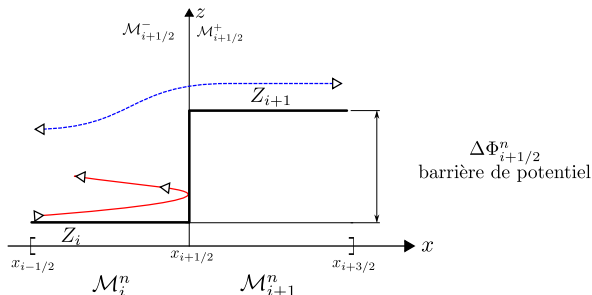




# LES FLUX MICROSCOPIQUES

INTERPRÉTATION : BARRIÈRE DE POTENTIEL

$$\mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi) = \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi > 0\}} \mathcal{M}_i^n(\xi)}_{\text{transmission positive}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi)}_{\text{réflexion}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n > 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n\left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n}\right)}_{\text{transmission négative}}$$

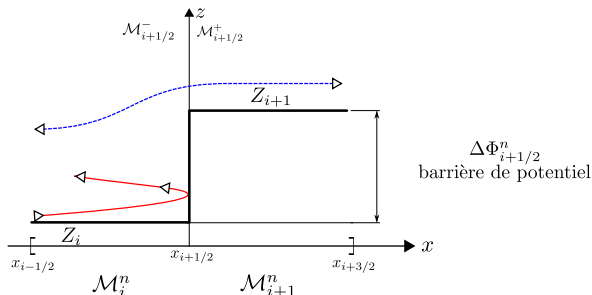


$\Delta\Phi_{i+1/2}^n$  peut aussi être interprété comme une pente dépendant du temps !

# LES FLUX MICROSCOPIQUES

INTERPRÉTATION : PENTE DYNAMIQUE  $\implies$  DÉCENTREMENT DE LA FRICTION

$$\mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi) = \overbrace{\mathbb{1}_{\{\xi > 0\}} \mathcal{M}_i^n(\xi)}^{\text{transmission positive}} + \overbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi)}^{\text{réflexion}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n > 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n\left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\Phi_{i+1/2}^n}\right)}_{\text{transmission négative}}$$



$\Delta\Phi_{i+1/2}^n$  peut aussi être interprété comme une pente dépendant du temps !

... **on réintègre la friction** ...

# DÉCENTREMENT DES TERMES SOURCES

- Terme conservatif  $\partial_x \mathbf{W}$  :

$$\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i$$

- Terme non-conservatif  $\mathbf{B} \partial_x \mathbf{W}$  :

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i)$$

où

$$\bar{\mathbf{B}} = \int_0^1 \mathbf{B}(s, \phi(s, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})) ds$$

pour les chemins « segment », i.e.

$$\phi(s, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1}) = s\mathbf{W}_{i+1} + (1-s)\mathbf{W}_i, s \in [0, 1]$$



*G. Dal Maso, P. G. Lefloch and F. Murat.*

Definition and weak stability of nonconservative products.  
*J. Math. Pures Appl.*, Vol 74(6) 483–548, 1995.



*C. Bourdarias, M.Ersoy and S. Gerbi.*

A kinetic scheme for transient mixed flows in non uniform closed pipes : a global manner to upwind all the source terms.  
*To appear in J. Sci. Comp.*, 2010.

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Avec

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}(\omega)$$

on a :

## PROPRIÉTÉS

- Positivité de  $A$  (sous une condition CFL),
- Conservativité de  $A$ ,
- Traitement naturel des écoulements sur fond sec et de l'assèchement.

par exemple



*E. Audusse and M-O. Bristeau and B. Perthame.*

Kinetic schemes for Saint-Venant equations with source terms on unstructured grids.  
*INRIA Report RR3989, 2000.*

Avec

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}(\omega)$$

on a :

## PROPRIÉTÉS

- Positivité de  $A$  (sous une condition CFL),
- Conservativité de  $A$ ,
- Traitement naturel des écoulements sur fond sec et de l'assèchement.

par exemple

→ schéma non équilibré avec un tel  $\chi$

→ mais calcul explicite des flux



*E. Audusse and M-O. Bristeau and B. Perthame.*

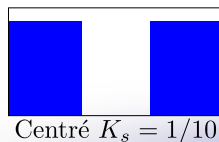
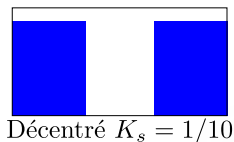
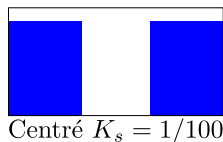
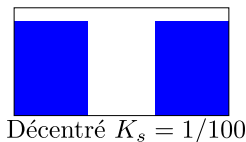
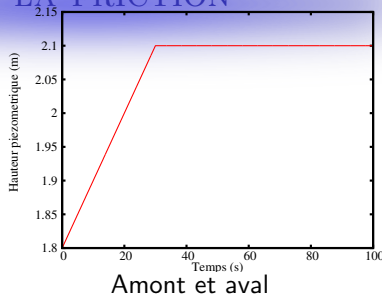
Kinetic schemes for Saint-Venant equations with source terms on unstructured grids.  
*INRIA Report RR3989, 2000.*

- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# IMPACT DU DÉCENTREMENT DE LA FRICTION

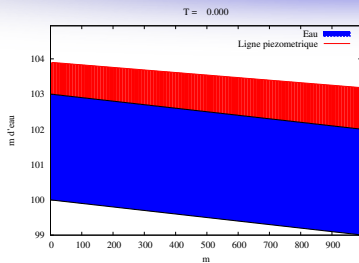
LA « DOUBLE RUPTURE DE BARRAGE »

- Conduite horizontale :  $L = 100 \text{ m}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ .
- État initial :  $Q = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $y = 1.8 \text{ m}$ .
- Conditions aux limites symétriques :

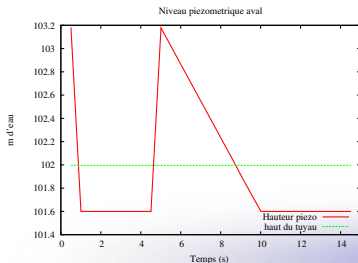




# ANALYSE QUALITATIVE DE CONVERGENCE



- charge amont constante égale à 104 m

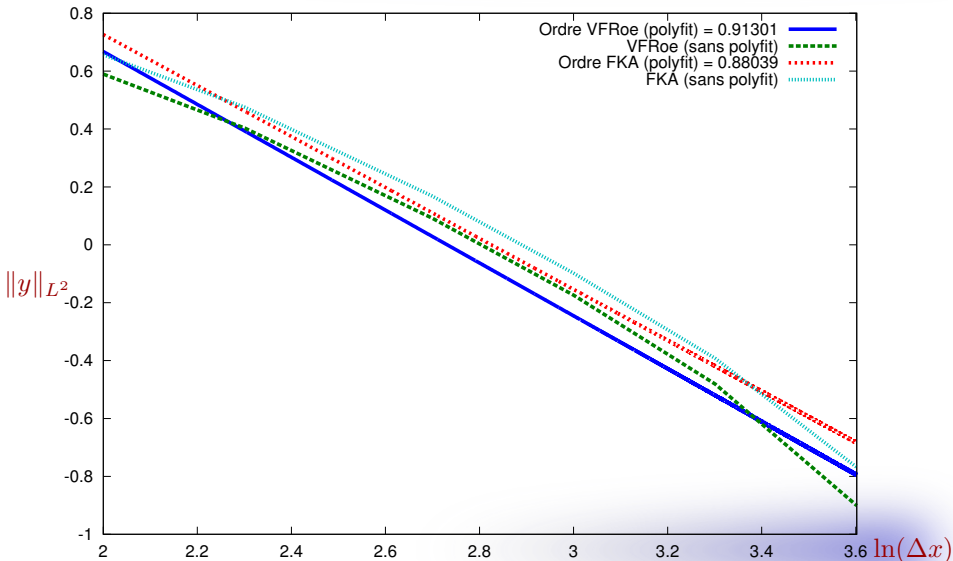


- hauteur piézométrique aval :

# CONVERGENCE

Lors du transitoire  $t = 100$  s

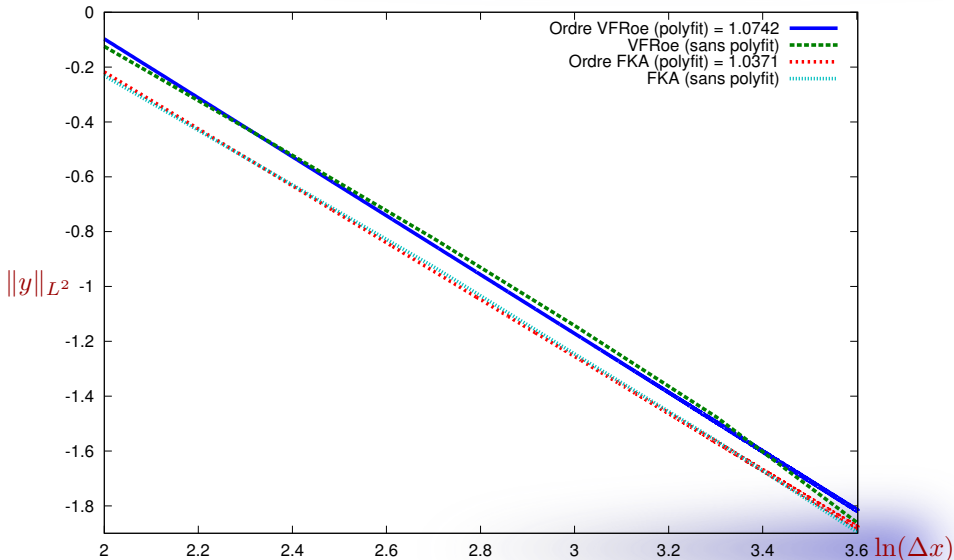
Erreur L2 : Ligne piezometrique au temps  $t = 100$  s



# CONVERGENCE

En fin de simulation  $t = 500$  s

Erreur L2 : Ligne piezometrique au temps  $t = 500$  s



- 1 EXEMPLES D'ÉCOULEMENTS EN COUCHE MINCE
- 2 ÉCOULEMENTS EN CONDUITE FERMÉE : LES ÉQUATIONS PFS (PRESSURIZED AND FREE SURFACE)
  - Travaux antérieurs
  - Dérivation formelle du modèle à surface libre et en charge
  - Relation de couplage : le modèle PFS
- 3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS PFS
  - Principe du solveur cinétique
  - Le schéma cinétique
  - Propriétés du schéma
- 4 QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES
- 5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

# CONCLUSION

- ✓ Formulation simple et conservative (simplicité de mise en œuvre numérique)
- ✓ Prise en compte de la compressibilité de l'eau pour la charge
  - ✓ coup de bélier
  - ✓ dépression

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

✓ Formulation simple et conservative (simplicité de mise en œuvre numérique)

✓ Prise en compte de la compressibilité de l'eau pour la charge

✓ coup de bélier

✓ dépression



Perspectives : cavitation

- condensation
- évaporation

A dynamic background image of a water splash, with droplets and ripples in shades of blue and white. The text is overlaid on this background.

Merci de votre  
attention