UNIVERSITÉ du SUD
Toulon-Var

ISITV

GOSSELIN Aurélie

LAFFITTE Élodie

Compte rendu de TP 1

Problème aux limite / Eléments finis

Marine 2A
Option Modélisation

17/04/2013

Sommaire

Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode pour résoudre des problèmes de physique ou plus généralement des équations différentielles avec conditions aux limites.

De façon générale, on part donc d'un problème (P) et on introduit sa formulation variationnelle (Q). On montre l'existence et l'unicité d'une solution par le théorème de Lax-Milgram. On travaille dans des espaces de Hilbert : on peut donc faire de l'approximation interne.

I) Principe des éléments finis :

A) Comment les obtient-on à partir d'un système continu pour arriver à un système discret ?

De façon mathématique :

Soit Ω le domaine ouvert de R^n (où n=1,2 ou3), de frontière $\partial\Omega$ et sur lequel on cherche à résoudre un problème (P) ramené à une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites. On écrit la formulation variationnelle et on obtient (Q) suivant :

$$Trouver\ u \in V\ tel\ que : a(u,v) = l(v), \forall v \in V$$

Où V est un espace de Hilbert. Sous réserve que l'équation de départ ait les bonnes propriétés (hypothèses du théorème de Lax-Milgram), (Q) admet une unique solution u. Pour obtenir une approximation numérique de u, on va remplacer V de dimension infinie par une série de sous-ensembles V_h de dimensions finies, et on va résoudre le problème approché (Q_h) :

$$Trouver\ u_h \in V_h\ tel\ que : a(u_h,v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$$

On sait que V_h est de dimension finie, c'est donc un fermé de V. Or V est un espace de Hilbert : V_h aussi donc. On applique donc encore une fois le théorème de Lax-Milgram : u_h existe et est unique.

En pratique l'espace V_h sera construit à partir d'un maillage du domaine Ω, l'indice h désignant la taille typique des mailles.

En effet, de façon plus physique :

On découpe la structure Ω en éléments de forme données : segments dans le cas 1D (où h est la longueur), triangles, quadrilatères ou tétraèdres dans le cas 2D (où h correspond à la longueur d'un côté). Les extrémités du segment, ou les sommets des autres figures sont appelés nœuds. Puis on cherche une solution comme combinaison linéaire de fonctions données sur chaque élément (et non plus sur la structure complète) en chaque nœud. La méthode par éléments finis est donc une méthode par morceaux, où l'ensemble de tous les éléments constitue le maillage.

Ainsi, en construisant des maillages de plus en plus fins, la suite des sous-espaces $(V_h)_h$ formera une approximation de V, et u_h une approximation de la véritable solution u.

B) Comment passe-t-on du système discrétisé aux fonctions de forme ?

Résumons : nous avions une EDP à résoudre sur un domaine Ω. Nous avons écrit la formulation variationnelle (Q) et on s'est ramené au problème :

$$Trouver\ u \in V\ tel\ que : a(u,v) = l(v), \forall v \in V$$

On va chercher une approximation u. Pour cela, on définit un maillage du domaine Ω grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h (sous espace vectoriel de V et de dimension finie N_h). Le problème approché est donc :

$$Trouver\ u_h \in V_h\ tel\ que : a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$$

On définit alors une base de V_h : $(\varphi_1, \dots \varphi_{Nh})$. ON peut donc décomposer notre solution approchée u_h en une combinaison linéaire des fonctions de base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i$$

Et donc le problème devient :

$$Trouver\ (\mu_1, \dots, \mu_{N_h})\ tels\ que : \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i\, a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$$

Or a et l sont linéaires donc on peut écrire :

$$Trouver\ \left(\mu_1, \dots, \mu_{N_h}\right) tels\ que : \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i\, a\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = l\left(\varphi_j\right), \forall j \in [1, .., N_h]$$

Cela revient à résoudre le système suivant : Aμ=B

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{bmatrix} \begin{matrix} \mu_1 \\ \cdots \\ \mu_{N_h} \end{matrix} = \begin{matrix} l(\varphi_1) \\ \dots \\ l(\varphi_{N_h}) \end{matrix}$$

Pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions φ_i de petit support : chaque φ_i sera nulle partout sauf sur la ième maille. Ainsi $a\left(\varphi_i, \varphi_j\right)$ sera le plus souvent nul (les fonctions sont de supports disjoints) et la matrice A sera creuse.

Le plus difficile est donc de définir les éléments et les fonctions φ_i.

II) Les éléments finis de référence P1 :

A) Rappels théoriques :

On considère le problème en 1D. On écrit sa formulation variationnelle, on a montré qu'elle n'admettait qu'une solution. On peut maintenant construire un maillage sur l'élément de référence : le segment [0,1]. On choisit de garder un pas constant h :

$$0 = x_1 < x_2 = h < x_3 = 2h < \cdots < x_{n+1} = 1 \quad donc\ \forall i \in [1, n+1], x_i = ih$$

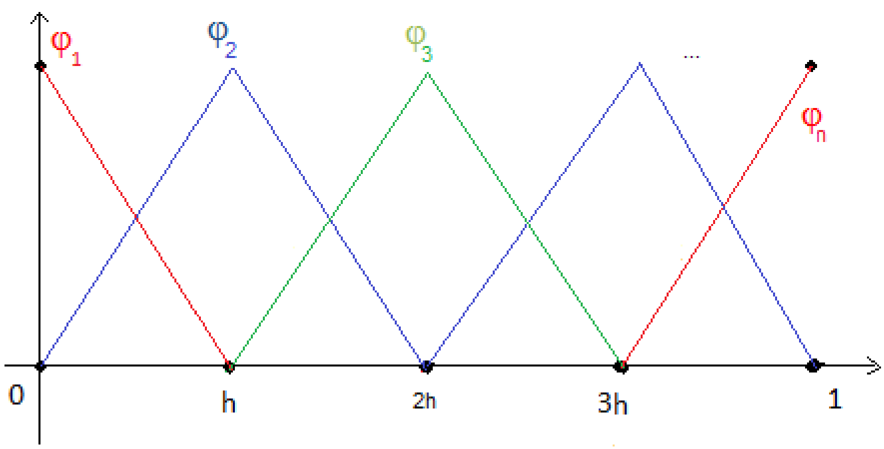
On peut alors définir l'espace V_h, sous-espace vectoriel de $H_0^1(a,b)$ tel que :

$$V_h = \{v_h \in C^0(a,b)\ telle\ que\ v_h est\ affine\ sur\ chaque\ segment\ [x_j, x_{j+1}] et\ v_h(a) = v_h(b) = 0\}$$

Le problème approché est donc :

$$trouver\ u_h \in V_h\ telle\ que\ a(u_h, v_h) = l(v_h)\ \forall v_h \in V_h$$

Une base de V_h est donc : $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\ avec\ \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, j = 1, \ldots, n$ les fonctions « chapeaux » comme suit :



Calculs appliqués :

On veut résoudre l'équation $-u''(x) = f(x)$. La formulation variationnelle est la suivante : $-\int_0^1 u''v = \int_0^1 fv$

Alors $\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv + u'(1)v(1) - u'(0)v(0), où\ \ u'(1) = \beta$

On pose $A = \int_0^1 u'v' \quad et\ B = \int_0^1 fv$

<u>Calcul de A :</u>

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j'$$

<u>Si i=j :</u>

$$a_{ii} = \int_0^1 \varphi_i^2 = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \frac{1}{h^2} = \frac{1}{h^2}[(i+1)h - (i-1)h] = \frac{2h}{h^2} = \frac{2}{h}$$

<u>Si i=j+1 :</u>

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi'_{i-1} = \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi_i'\varphi_{i-1}' = \int_{(i-1)h}^{ih} (-\frac{1}{h})\frac{1}{h} = -\frac{1}{h^2}h = -\frac{1}{h}$$

Donc on obtient :

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2/h & -1/h & 0 & 0 & 0 \\ -1/h & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1/h \\ 0 & 0 & 0 & & 2/h \end{pmatrix}$$

Rappel : formule de Simpson :

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right]$$

On peut donc calculer le second membre $B = \int_0^1 fv$:

Pour $i \neq 1\ et\ i \neq n$:

$$\int_0^1 f\varphi_i = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} f\varphi_i$$
$$= \frac{(i+1)h-(i-1)h}{6}[f\big((i-1)h\big) * \varphi_i\big((i-1)h\big) + 4f(ih)\varphi_i(ih)$$
$$+ f\big((i+1)h\big)\varphi_i\big((i+1)h\big)$$
$$= \frac{h}{3}[f\big((i-1)h\big) * 0 + 4f(ih) * 1 + f\big((i+1)h\big) * 0 = \frac{h}{3} * 4f(ih)$$

Pour i=1 :

$$\int_0^1 f\varphi_1 = \int_0^h f\varphi_1 = \frac{h-0}{6}\left[f(0)\varphi_1(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right)\varphi_1\left(\frac{h}{2}\right) + f(h)\varphi_1(h)\right] = \frac{h}{6}[f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)]$$

Pour i=n :

$$\int_0^1 f\varphi_n = \int_{(n-1)h}^{nh} f\varphi_n$$
$$= \frac{nh-(n-1)h}{6}\Big[f\big((n-1)h\big)\varphi_n\big((n-1)h\big) + 4f\left(nh-\frac{h}{2}\right)\varphi_1\left(nh-\frac{h}{2}\right)$$
$$+ f(nh)\varphi_n(nh)\Big] = \frac{h}{6}[f(nh) + 2f\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)h\right)]$$

On a donc le système :

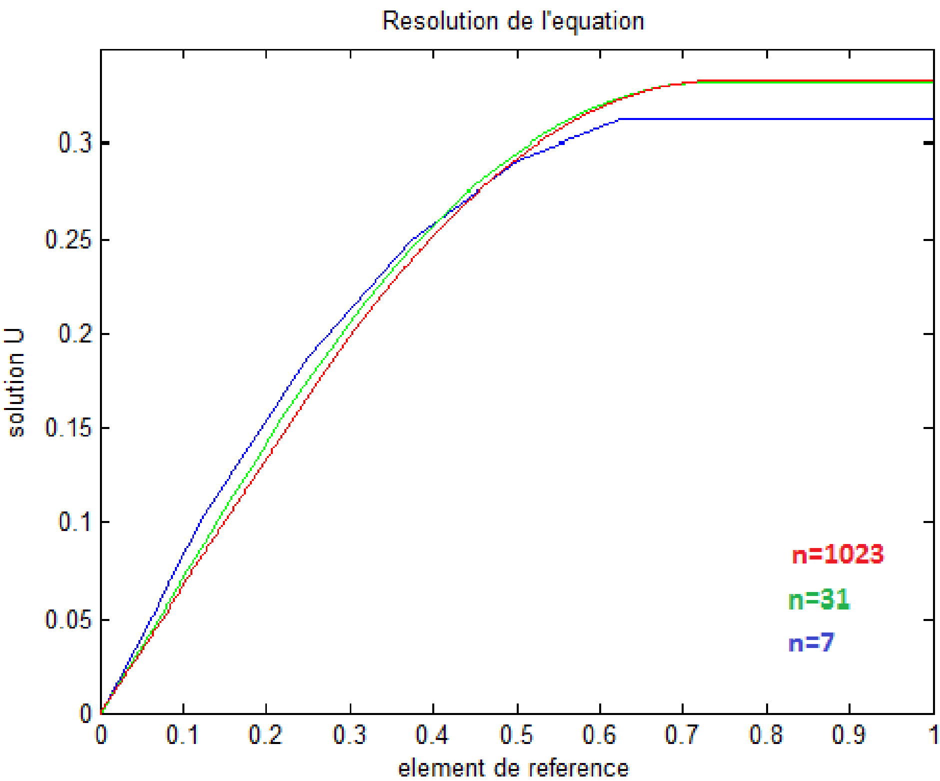
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/h & -1/h & 0 & 0 & 0 \\ -1/h & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1/h \\ 0 & 0 & 0 & -1/h & 2/h \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{h}{6}[f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)] \\ \frac{h}{3} * 4f(ih) \\ \dots \\ \frac{h}{3} * 4f(ih) \\ \frac{h}{6}[f(nh) + 2f\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)h\right)] \end{pmatrix}}_{B}$$

On va donc chercher à appliquer les conditions aux limites : u(0)= α (condition de Dirichlet) et u'(1)= β (condition de Neumann). Le système est donc transformé comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/h & 2/h & -1/h & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1/h \\ 0 & 0 & 0 & -1/h & 2/h \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\left(\frac{h}{6}\left(f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)\right) + \alpha\right)}{h} \\ \frac{h}{3} * 4f(ih) \\ \dots \\ \frac{h}{3} * 4f(ih) \\ \frac{h}{6}\left[f(nh) + 2f\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h\right)\right] + \beta \end{pmatrix}}_{B}$$

B) <u>Résolution numérique :</u>

Après implémentation du code placé en annexe, on obtient les résultats suivants :



Cas n=7 : La valeur du « plateau », que l'on observe à partir de 0.65, est 0.3125.

Cas n=31 : La valeur du « plateau », que l'on observe à partir de 0.73 cette fois, est 0.333.

Cas n=1023 : Cas de référence : La valeur du « plateau » est 0.333.

Analyse :

L'allure générale reste la même pour les trois courbes et est cohérente. En effet, en 0 la solution doit valoir 0 d'après la solution de Dirichlet (u(0)=0) ce qui est bien observable sur les trois courbes. De plus, la dérivée au point 1 doit valoir 0 d'après la condition de Neumann (u'(1)=0) : on observe bien un plateau sur la fin de notre plage de valeurs.

A partir d'un certain n, assez grand, on observe une stabilisation du résultat autour de la valeur 0.333. Si le n est trop petit, la solution est sous-estimée.

III) Les éléments finis de référence P2 :

A) Rappels théoriques :

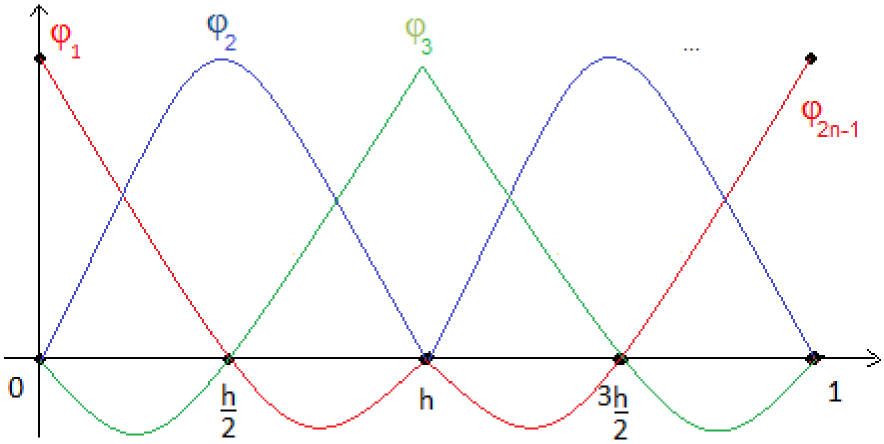
On reste sur le même problème 1D. Commençons par rappeler les principales caractéristiques de l'élément fini « de référence ». Il s'agit du segment [0,1], il comporte 3 nœuds : 0, ½, 1 et on peut lui attribuer 3 fonctions de référence $\widehat{F_1}, \widehat{F_2}, \widehat{F_3}$ définies comme suit :

$\phi : \widehat{F_1} = (1-x)(1-2x) = 1 - 3x + 2x^2 \quad et\, \widehat{F_3} = \big(1 + (x-1)\big)\big(1 + 2(x-1)\big) = 2x^2 - x$

Il s'agit des fonctions ϕ du cours translatées de 1 vers la droite.

$$\psi : \widehat{F_2} = 1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4x(1-x) = 4x - 4x^2$$

Il s'agit de la fonction ψ du cours translatée de ½ vers la droite.



En considérant bien le segment [0,1], calculons la matrice élémentaire symétrique.

$$K_e = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$K_{11} = \int_0^1 (\hat{F}_1')^2 = \int_0^1 (4x-3)^2\,dx = \frac{7}{3}$$

$$K_{22} = \int_0^1 (\hat{F}_2')^2 = \int_0^1 (4-8x)^2\,dx = \frac{16}{3}$$

$$K_{33} = \int_0^1 (\hat{F}_3')^2 = \int_0^1 (4x-1)^2\,dx = \frac{7}{3}$$

$$K_{12} = \int_0^1 \hat{F}_1'\hat{F}_2' = \int_0^1 (4x-3)(4-8x)dx = -\frac{8}{3} = K_{21}$$

$$K_{23} = \int_0^1 \hat{F}_2'\hat{F}_3' = \int_0^1 (4-8x)(4x-1)dx = -\frac{8}{3} = K_{32}$$

$$K_{31} = \int_0^1 \hat{F}_3'\hat{F}_1' = \int_0^1 (4x-1)(4x-3)dx = \frac{1}{3} = K_{13}$$

La matrice élémentaire est donc :

$$K_e = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Et la matrice de rigidité est :

K_e

$$\frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Tâchons à présent de donner la matrice élémentaire pour un élément quelconque $\{x_j , x_{j+1/2} ,x_{j+1}\}$ via un changement de variable.

$$[0,1] \quad \rightarrow \quad [x_j, x_{j+1}]$$

$$y = a\hat{x} + b \quad \rightarrow \quad x_j = b \; et \; x_{j+1} = a + b \; donc \; a = x_{j+1} - b = x_{j+1} - x_j$$

Et on remplace :

$$y = \psi(\hat{x}) = (x_{j+1} - x_j)\hat{x} + x_j = h\hat{x} + x_j \;\; donc \; dy = hd\hat{x}$$

On peut donc modifier les fonctions de base :

$$\boldsymbol{F_1(x) = \widehat{F}_1(x) = \widehat{F}_1(\psi^{-1}(x))}$$

Donc $F_1'(x) = \hat{F}_1'\big(\psi^{-1}(x)\big) * \psi'^{-1}(x)$ et on remplace dans les expressions des éléments de K_e :

$$K_{11} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (F_1'(x))^2 dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \hat{F}_1'^2\big(\psi^{-1}(x)\big) * (\psi'^{-1}(x))^2 \, dx$$

Or $dx = \psi'(\hat{x})d\hat{x} = hd\hat{x}$ et $\psi^{-1}(x) = \frac{x - x_j}{h}$ $\; donc \; \psi'^{-1}(x) = \frac{1}{h} \; donc \; (\psi'^{-1}(x))^2 = \frac{1}{h^2}$

On obtient donc :

$$K_{11} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \hat{F}_1'^2 \left(\frac{x - x_j}{h}\right) * \frac{1}{h^2} h d\hat{x} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \hat{F}_1'^2 (\hat{x})\, d\hat{x} = \frac{7}{3h}$$

De même :

$$\boldsymbol{F_2(x) = \widehat{F}_2(x) = \widehat{F}_2(\psi^{-1}(x))}$$

Et on retrouve :

$$K_{22} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \hat{F}_2'^2 (\hat{x})\, d\hat{x} = \frac{16}{3h}$$

Et :

$$\boldsymbol{F_3(x) = \widehat{F}_3(x) = \widehat{F}_3(\psi^{-1}(x))}$$

Et on retrouve :

$$K_{22} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \hat{F}_2'^2 (\hat{x})\, d\hat{x} = \frac{16}{3h}$$

Les autres coefficients seront aussi simplement multipliés par 1/h et la nouvelle matrice élémentaire est :

$$K_e = \frac{1}{3h} * \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

On peut donc construire la matrice de rigidité pour un élément quelconque :

K_e

$$\frac{1}{3h} * \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}}_{A}$$

On choisit n quelconque puis on numérote les points de 1 à 2n-1 (**il y a 2n-1 points**) et on se place sur l'élément de référence [0,1] donc : $x_1 = 0 \; et \; x_{2n-1} = 1$. Les points impairs correspondent aux points extrémaux de chaque élément et les points pairs aux points milieux. On a comme pas $h = \frac{1}{n-1}$

On numérote les éléments de 1 à n-1 (**il y a n-1 éléments**), on va donc écrire une subroutine qui va associer à chacun des éléments l'ensemble de ses nœuds. On affichera ainsi le « tableau de connectivité ». Par exemple, si n=5 , on a n-1=4 éléments et 2n-1=9 points et on obtient le tableau de connectivité suivant :

Elément 1	→	0	0.1250	0.2500
Elément 2	→	0.2500	0.3750	0.5000
Elément 3	→	0.5000	0.6250	0.7500
Elément 4	→	0.7500	0.8750	1.0000
		Nœud 1 de l'élément 4	Nœud 2 de l'élément 4	Nœud 3 de l'élément 4

Les 9 points

On va maintenant chercher à assembler numériquement la matrice de rigidité. Pour cela, on fait une boucle sur les éléments, pour chaque élément on remplit la matrice avec les points correspondant à cet élément.

Il nous faut à présent déterminer le second membre du système Au=B. On commence par l'approche théorique.

On sait que :

$$B = \int_0^1 f\varphi$$

$$où \; \varphi \; correspond \; à \; la \; fonction \; de \; forme \; correspondante \; à \; l'intervalle \; considéré$$

On va approcher l'intégrale par la formule de Simpson :

$$\int_a^b g = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right)$$

<u>Premier élément : si i=1 :</u>

$$\int_0^h f\varphi_1 = \int_0^h f\widehat{F_1} = \frac{h-0}{6}\left[f(0)\widehat{F_1(0)} + 4f\left(\frac{h}{2}\right)\widehat{F_1\left(\frac{h}{2}\right)} + f(h)\widehat{F_1(h)}\right]$$
$$= \frac{h}{6}\left[f(0) * 1 + 4f\left(\frac{h}{2}\right) * 0 + f(h) * 0\right] = \frac{h}{6}f(0)$$

Dernier élément : si i=2n-1 :

$$\int_{2n-3}^{2n-1} f\varphi_{2n-1} = \int_{(2n-3)h}^{(2n-1)h} f\widehat{F_3}$$
$$= \frac{[(2n-1)-(2n-3)]h}{6}[f\big((2n-3)h\big) * F_3\big((\widehat{2n-}3)h\big)$$
$$+ 4f\left(\frac{(2n-1)h+(2n-3)h}{2}\right)F_3\big((\widehat{2n-}2)h\big)$$
$$+ f\big((2n-1)h\big)F_3((\widehat{2n-}1)h)]$$
$$= \frac{h}{3}[f\big((2n-3)h\big) * 0 + 4f\left(\frac{(2n-1)h+(2n-3)h}{2}\right) * 0 + f\big((2n-1)h\big)$$
$$* 1 = \frac{h}{3}f((2n-1)h)$$

Eléments du centre : on va distinguer deux cas :

- Cas i pair :

$$\int_{\frac{(i-1)}{2}h}^{\frac{i}{2}h} f\varphi_i = \int_{\frac{(i-1)}{2}h}^{\frac{i}{2}h} f\widehat{F_2}$$
$$= \frac{\frac{i}{2}h - \frac{(i-1)}{2}h}{6}\left[f\left(\frac{(i-1)}{2}h\right)F_2\left(\widehat{\frac{(\imath-1)}{2}}h\right)\right.$$
$$+ 4f\left((i-\frac{1}{2})\frac{h}{2}\right)F_2\left(\widehat{\left(\imath-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2}}\right) + f\left(\frac{i}{2}h\right)F_2\left(\widehat{\frac{\imath}{2}h}\right)]$$
$$= \frac{h}{12}\left[f\left(\frac{(i-1)}{2}h\right) * 0 + 4f\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2}\right) * 1 + f\left(\frac{i}{2}h\right) * 0]$$
$$= \frac{h}{12}4f\left((i-\frac{1}{2})\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{3}f((i-\frac{1}{2})\frac{h}{2})$$

- Cas i impair :

$$\int_{\frac{(i-3)h}{2}}^{\frac{(i+1)h}{2}} f\varphi_i = \int_{\frac{(i-3)h}{2}}^{\frac{(i-1)h}{2}} f\widehat{F_3} + \int_{\frac{(i-1)h}{2}}^{\frac{(i+1)h}{2}} f\widehat{F_1} = \frac{h}{6}f\left(\frac{(i-1)h}{2}\right) + \frac{h}{6}f\left(\frac{(i-1)h}{2}\right)$$
$$= \frac{h}{3}f\left(\frac{(i-1)h}{2}\right)$$

On prend en compte les conditions aux limites. On dispose d'une première condition de Dirichlet : u(0) = α =0 alors on transforme ainsi le système :

$$A(1,1) = 1 \; et \; A(1,2{:}\,n) = 0$$

Et

$$B(1) = \frac{\frac{h}{6}f(0) + \alpha}{h}$$

On a aussi une condition de Neumann : u'(1)=β=0 alors A ne change pas, et :

$$B(2n-1) = \frac{h}{3}f\big((2n-1)h\big) + \beta$$

On obtient donc le système suivant : Au=B avec :

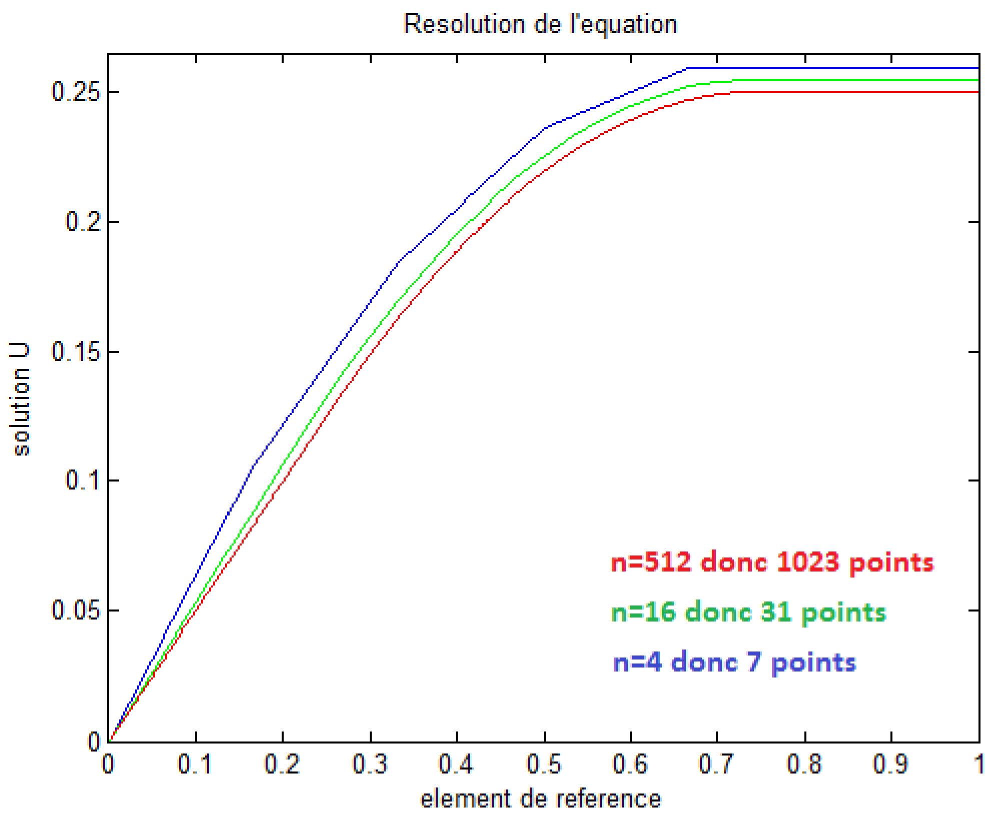
$$B = \begin{matrix} \dfrac{\frac{h}{6}f(0)+\alpha}{h} \\ \frac{h}{3}f((i-\frac{1}{2})\frac{h}{2}) \\ \frac{h}{3}f\left(\dfrac{(i-1)h}{2}\right) \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{h}{3}f\left(\dfrac{(i-1)h}{2}\right) \\ \frac{h}{3}f((i-\frac{1}{2})\frac{h}{2}) \\ \frac{h}{3}f\big((2n-1)h\big)+\beta \end{matrix}$$

Ce qui dans notre exemple :

$$\frac{1}{3h}\underbrace{\overset{K_e}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {} & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\frac{h}{6}f(0)+\alpha}{h} \\ \frac{h}{3}f((\frac{3}{2})\frac{h}{2}) \\ \frac{h}{3}f(h) \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{h}{3}f(3h) \\ \frac{h}{3}f((\frac{15}{2})\frac{h}{2}) \\ \frac{h}{3}f(9h)+\beta \end{pmatrix}}_{f}$$

B) Résolution numérique et comparaison

A présent que nous avons défini théoriquement les données du problème, nous les avons implémentés numériquement (code placé en annexe) et on obtient les résultats suivants :



Pour un nombre n très grand, on considère que la solution précédente obtenue avec les éléments P1 est exacte, et on va la comparer avec celle obtenue via les éléments P2. Avec les éléments P1, on considérait n le nombre de points en 3 cas : n=7, puis n=31 et n=1023 points. Or avec les éléments P2 la notation diffère : on travaille avec N=2n'-1 points on s'est donc arrangés pour poser n' tel que N=n dans les trois cas : par exemple n'=512 pour que N=1023….

Cas n'= 512 (1023 points) : La valeur du « plateau » est 0.2502.

Cas n'=16 : La valeur du « plateau » est 0.2548.

Cas x=4 : La valeur du « plateau » est 0.2593.

Analyse :

Comme précédemment, l'allure de la courbe est correcte vis-à-vis des conditions aux limites. A contrario, un nombre insuffisant de points surestime la solution. De plus, la valeur finale du plateau diffère de celle obtenue en P1 avec un grand nombre de points. Cela n'est pas normal, les deux types d'éléments devraient nous conduire à une même valeur finale. Cela peut être dû à une maladresse dans la compréhension de la méthode, ou une erreur de codage : soit dans l'implémentation en elle-même, soit dans le calcul des coefficients des différentes matrices.

Conclusion :

Résoudre un problème par une méthode d'éléments finis nous permet d'aboutir à une résolution relativement précise. Cependant, nous aboutissons à des résultats différents selon le type d'éléments finis. Si cela n'est pas dû à une erreur, il faudrait déterminer quel type d'élément correspond le plus au problème considéré.

Annexe

- Code Matlab pour la résolution avec les éléments P1 :

```
close all
clear all
clc

%%%%%%%%%%
%% TD 2 %%  : Cinquième partie
%%%%%%%%%%

% Résolution de l'équation -u"(x)=f avec u(0)=alpha et u'(1)=beta

%% cas : alpha=beta=0 et f =1 entre 1/4 et 3/4 et 0 ailleurs

% Conditions aux limites
 alpha=0;
 beta=0;

%% ALGORITHME

% Définition du nombre de points et du pas
n=7;
h=1/(n+1);

% Création du membre de gauche

A=zeros(n+2,n+2);
for i=2:n+2
  A(i,i)=(2/h);
end
for i=2:n+1
    A(i,i+1)=-(1/h);
    A(i+1,i)=-(1/h);
end
A(1,1)=1/h;
A(n+2,n+2)=(1/h);
A(2,1)=-(1/h);
```

```
A

% Création du membre de droite
B=zeros(n+2,1);
for i=2:n+1
    B(i)=(4/3)*h*(f(i*h));
end
 B(1)=((h/6)*(f(0)+2*f(h/2))+alpha)/h;
B(n+2)=(h/6)*(f((n-1/2)*h)+2*f(n*h))+beta;
B;

% Résolution du système
U=inv(A)*B

% Représentation de la solution
figure (1)
abs=[0:h:1];
plot (abs,U,'r')
title 'Resolution de l''equation'
xlabel 'element de reference'
ylabel 'solution U'
legend 'resolution P1'
axis ([0 1 0 0.35])
```

- Code Matlab pour la résolution avec les éléments P2 :

```
close all
clear all
clc

%%%%%%%%%%
%% TD 3 %%
%%%%%%%%%%

n=4; % 2n-1 points donc n-1 éléments
h=1/(n-1);% pas

%conditions aux limites
alpha=0;
beta=0;

noeud=zeros(n-1,3);
for i=1:n-1
    noeud(i,1)=(i-1)*h;
    noeud(i,2)=(2*i-1)*(h/2);
    noeud(i,3)=i*h;
end
noeud % Affichage du tableau de connectivité : noeud (n°element,n°noeud)

% Création de la matrice élémentaire Ke
Ke=zeros(3); % initialisation
Ke=[7 -8 1;-8 16 -8; 1 -8 7];

% Création de la matrice de rigité A
A=zeros(2*n-1); % initialisation
A(1:3,1:3)=Ke;
for i=3:2:2*n-3
    A(i:i+2,i:i+2)=A(i:i+2,i:i+2)+Ke;
```

```matlab
end
A(1,1)=1;
A(1,2:n)=0;
A=(1/(3*h))*A


% Création du membre de droite
B=zeros(2*n-1,1);
for i=2:2*n-2
    if (mod(i,2)==0)
    B(i)=(2*h/3)*f((i-(1/2))*(h/2));
    elseif (mod(i,2)==1)
    B(i)=(1*h/3)*f((i-1)*(h/2));
    end
end
B(1)=((h/6)*f(0)+alpha)/h;
B(2*n-1)=(h/3)*f((2*n-1)*h)+beta;
B

% Résolution du système
U=inv(A)*B

% Représentation de la solution
figure (1)
abs=[0:h/2:1];
plot (abs,U,'r')
title 'Resolution de l''equation'
xlabel 'element de reference'
ylabel 'solution U'
%legend 'resolution P2'
axis ([0 1 0 0.265])
```