Université du Sud - Toulon - Var
ISITV - 1ère année Marine
Mehmet Ersoy

Méthode des différences finies
Travaux Dirigés I

1 Discrétisation en temps

Exercice 1 (Cas scalaire)**.**
Soit $\lambda > 0$ donné. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = -\lambda u(t),\, t > 0 \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Écrire le schéma d'Euler explicite et implicite.
2. Montrer que ces deux schémas sont consistant à l'ordre 1.
3. Étudier la stabilité L^2 de ces schémas.
4. Conclure.

Exercice 2 (Cas vectoriel)**.**
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} u'(t) = -Au(t),\, t > 0 \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{2}$$

Écrire le schéma d'Euler explicite et implicite puis étudier la convergence.

2 L'équation de transport

On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant :

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + c \cdot u_x = 0, x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Exercice 3 (transport ?)**.**
Montrer que la solution u est constante le long des courbes dites "caractéristiques" définies par :

$$\forall 0 < s < t, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{dX}{ds}(s) = c \text{ and } X(t) = x.$$

En déduire que la solution de cette équation est

$$u(t, x) = u_0(x - ct).$$

Nous supposerons désormais $c > 0$. On s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation (5) par des schémas aux différences finies de pas de temps Δt sur une grille spatiale régulière de pas Δx. On note $\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Exercice 4 (Schémas d'ordre 1)**.**
Écrire
- le schéma explicite centré,

– le schéma implicite centré,
– le schéma explicite décentré vers l'amont.

Dans les trois cas étudier

1. la stabilité L^2,
2. la consistance,
3. la nature de l'équation modifiée.

Enfin, discuter des avantages et inconvénients des différents schémas.

Exercice 5 (Un schéma d'ordre 2 : schéma de Lax-Wendroff)**.**
Soit U une solution régulière de l'équation (5).

1. Montrer que

$$U(t_{n+1}, x_j) = U(t_n, x_j) - c\Delta t U_x(t_n, x_j) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2} U_{xx}(t_n, x_j) + O(\Delta t^3).$$

2. Comment à partir de cette égalité, peut on en déduire le schéma numérique suivant

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

3. Étudier ce schéma.

3 L'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} u_t - \nu u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On considère le schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\nu}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Exercice 6.

1. Étudier la consistance.
2. En utilisant l'analyse matricielle, montrer que ce schéma est stable sous la condition dite de CFL

$$\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

3. En utilisant l'analyse de Fourier, démontrer le résultat de la question précédente.

4 L'équation de convection-diffusion

On considère l'équation de convection-diffusion

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} u_t + V \cdot u_x - \nu u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 7.
Proposer un schéma de votre choix et l'étudier.