Outline

Notations

- $\mathbb{R}^n$ = ensemble des vecteurs (colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ et x^T (ou x^t) le vecteur transposé (ligne)

Notations

- $\mathbb{R}^n$ = ensemble des vecteurs (colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ et x^T (ou x^t) le vecteur transposé (ligne)
- $\mathbb{K}^{n\times m}$ ou $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ = ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Notations

- $\mathbb{R}^n$ = ensemble des vecteurs (colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ et x^T (ou x^t) le vecteur transposé (ligne)
- $\mathbb{K}^{n\times m}$ ou $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ = ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Notations

- $\mathbb{R}^n$ = ensemble des vecteurs (colonnes) à coefficients dans $\mathbb{R}$ et x^T (ou x^t) le vecteur transposé (ligne)
- $\mathbb{K}^{n\times m}$ ou $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ = ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$
- $\mathbb{K}_r^{n\times m}$ ou $\mathcal{M}_{n,m}^r(\mathbb{K})$ = ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (e.g. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de rang r.

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- On peut aussi définir des matrices par blocs en remplaçant la composante scalaire par une sous-matrice par bloc.

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- On peut aussi définir des matrices par blocs en remplaçant la composante scalaire par une sous-matrice par bloc.
- Exemple : si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ et $C \in \mathcal{M}_{m,m}$ alors la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure de taille $(m+n) \times (m+n)$.

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- matrice transposée : si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ alors $A^T = (a_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n}$ et $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- matrice transposée : si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ alors $A^T = (a_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant m}$ et $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- matrice symétrique $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$: $A = A^T$, i.e, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- matrice transposée : si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ alors $A^T = (a_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant m}$ et $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- matrice symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : $A = A^T$, i.e, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$
- matrice hermitienne ou auto-adjointe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $A = \overline{A}^T$ (ou encore $A = A^*$ ou $A = A^H$), i.e, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i, j$

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- matrice transposée : si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ alors $A^T = (a_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant m}$ et $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- matrice symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : $A = A^T$, i.e, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$
- matrice hermitienne ou auto-adjointe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $A = \overline{A}^T$ (ou encore $A = A^*$ ou $A = A^H$), i.e, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i, j$
- matrice semi-définie positive : $x^T A x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Quelques matrices usuelles

- diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$
- triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$
- tridiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 1$
- pentadiagonale si $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| > 2$
- matrice transposée : si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ alors $A^T = (a_{j,i})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant m}$ et $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
- matrice symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : $A = A^T$, i.e, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$
- matrice hermitienne ou auto-adjointe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $A = \overline{A}^T$ (ou encore $A = A^*$ ou $A = A^H$), i.e, $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $\forall i, j$
- matrice semi-définie positive : $x^T A x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
- matrice définie positive : $x^T A x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Quelques matrices usuelles

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique

Quelques matrices usuelles

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique complexe
   non auto-adjointe

Quelques matrices usuelles

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique complexe non auto-adjointe
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice auto-adjointe

Quelques matrices usuelles

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3+i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique complexe non auto-adjointe
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice auto-adjointe
4. Transposée de matrices par blocs :
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- i.e, de manière équivalente $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avec $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ alors $Ax = (a_i x)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (ATTENTION ici a_i est un vecteur ligne).

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- i.e, de manière équivalente $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avec $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ alors $Ax = (a_i x)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (ATTENTION ici a_i est un vecteur ligne).
- ou encore $A = [a_1, \ldots, a_m]$ avec $a_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$ alors $Ax = a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m$ avec $a_i \in \mathbb{K}^n$.

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ alors

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ alors

1. $Ax = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 \\ -1 \times 4 + 0 \times 5 + 1 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ alors
  1. $Ax = \begin{pmatrix} 1\times 4 + 2\times 5 + 1\times 6 \\ -1\times 4 + 0\times 5 + 1\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$
  2. $Ax = 4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}$
- En fonction de l'architecture machine, la deuxième méthode peut être plus avantageuse surtout lorsque la matrice est de grande dimension

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_1, \ldots, b_p] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $AB = A[b_1, \ldots, b_p] = [Ab_1, \ldots, Ab_p]$ avec $b_j \in \mathbb{K}^n$.

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_1, \ldots, b_p] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $AB = A[b_1, \ldots, b_p] = [Ab_1, \ldots, Ab_p]$ avec $b_j \in \mathbb{K}^n$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $(AB)^* = B^* A^*$.

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Opérations

- Soient $\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K}$ $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^m$ alors
$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$$
- Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = [b_1, \ldots, b_p] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $AB = A[b_1, \ldots, b_p] = [Ab_1, \ldots, Ab_p]$ avec $b_j \in \mathbb{K}^n$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $(AB)^* = B^* A^*$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $(A^*)^* = A$.

Outline

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire (ou produit interne : à ne pas confondre avec le produit externe $xy^T = (x_i y_j)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $x, y \in \mathbb{K}^n$).

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
  2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
  2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)
  3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
  2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)
  3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)
  4. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) = < x, y > = x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
  2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)
  3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)
  4. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)
  5. $\sqrt{(x, x)} = \|x\|_2$ induit la norme euclidienne

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
  2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)
  3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)
  4. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)
  5. $\sqrt{(x, x)} = \|x\|_2$ induit la norme euclidienne
  6. $(x, y) = \|x\| \, \|y\| \cos(\theta)$ où $\theta =$ angle(x, y)

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
  1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
  2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)
  3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)
  4. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)
  5. $\sqrt{(x, x)} = \|x\|_2$ induit la norme euclidienne
  6. $(x, y) = \|x\| \, \|y\| \cos(\theta)$ où $\theta =$ angle(x, y)
  7. $|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwartz)

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(x, y) =< x, y >= x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire
- Propriétés :
    1. (x, y) (forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)
    2. $(x, y) = (y, x)$ (symétrie)
    3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)
    4. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)
    5. $\sqrt{(x, x)} = \|x\|_2$ induit la norme euclidienne
    6. $(x, y) = \|x\| \, \|y\| \cos(\theta)$ où $\theta =$ angle(x, y)
    7. $|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwartz)
    8. $\vdots$

Définition et propriétés

- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors

  $(x, y) = < x, y > = x \cdot y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne le produit scalaire

- Soient $x, y \in \mathbb{C}^n$ alors

  $(x, y) = < x, y > = x \cdot y = x^H y = x^* y = \overline{x}^T y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$

  désigne le produit scalaire hermitien

- Propriétés :
  1. (x, y) (forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, i.e, linéaire par rapport à y et sesquilinéaire par rapport à x, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{C}^n$, $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \overline{\alpha}(x_1, y) + \overline{\beta}(x_2, y)$)
  2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (symétrie hermitienne)
  3. $(x, x) \geqslant 0$ (positive)
  4. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie)
  5. $\vdots$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- $x, y \in \mathbb{K}^n$ sont orthogonaux si $(x, y) = 0$ et orthonormés si de plus $(x, x) = (y, y) = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Définition et propriétés

- $x, y \in \mathbb{K}^n$ sont orthogonaux si $(x, y) = 0$ et orthonormés si de plus $(x, x) = (y, y) = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- matrice orthogonal $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $AA^T = I$, i.e,
  $\Rightarrow A^{-1} = A^T$

Définition et propriétés

- $x, y \in \mathbb{K}^n$ sont orthogonaux si $(x, y) = 0$ et orthonormés si de plus $(x, x) = (y, y) = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- matrice orthogonal $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $AA^T = I$, i.e,
  $\Rightarrow A^{-1} = A^T$
- matrice unitaire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $AA^* = I$,i.e, $\Rightarrow A^{-1} = A^*$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- $x, y \in \mathbb{K}^n$ sont orthogonaux si $(x, y) = 0$ et orthonormés si de plus $(x, x) = (y, y) = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- matrice orthogonal $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $AA^T = I$, i.e,
  $\Rightarrow A^{-1} = A^T$
- matrice unitaire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $AA^* = I$,i.e, $\Rightarrow A^{-1} = A^*$
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale et $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors $(Ax, Ay) = (x, y)$ (ne modifie pas les normes)

Outline

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- Exemple : dév. par rapport à $i = 1$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \times 1 \times \det \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A_{11}} +$$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- Exemple : dév. par rapport à $i = 1$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \times 1 \times \det \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A_{11}} + (-1)^{1+2} \times 0 \times \det \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}^{A_{12}} +$$

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- Exemple : dév. par rapport à $i = 1$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \times 1 \times \det \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A_{11}} + (-1)^{1+2} \times 0 \times \det \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}^{A_{12}} +$$

$$(-1)^{1+3} \times (-1) \times \det \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}^{A_{13}} = -17 + 0 + 7 = 10$$

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)_{ij}$: comatrice

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)_{ij}$: comatrice
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne (ou ligne) de 0 ou deux colonnes (lignes) identiques alors $\det(A) = 0$.

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)_{ij}$: comatrice
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne (ou ligne) de 0 ou deux colonnes (lignes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)_{ij}$: comatrice
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne (ou ligne) de 0 ou deux colonnes (lignes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A^*) = \det(A)$.

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right)_{ij}$: comatrice
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne (ou ligne) de 0 ou deux colonnes (lignes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A^*) = \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice diagonale ou triangulaire (inférieure ou supérieure) alors $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = \left((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\right)_{ij}$: comatrice
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne (ou ligne) de 0 ou deux colonnes (lignes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A^*) = \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice diagonale ou triangulaire (inférieure ou supérieure) alors $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Définition et propriétés

- Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ alors $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$ (dév. suivant la ligne i)
- matrice inversible si $det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$ où $(\text{com}(A))_{ij} = ((-1)^{i+j} \det(A_{ij}))_{ij}$: comatrice
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne (ou ligne) de 0 ou deux colonnes (lignes) identiques alors $\det(A) = 0$.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A^*) = \det(A)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice diagonale ou triangulaire (inférieure ou supérieure) alors $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- propriétés supplémentaires en TD.

Outline

Définition et exemples

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L} : E \to F$ est une application linéaire si

$$\forall \alpha, \beta, x, y \in E, \quad \mathcal{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{L} x + \beta \mathcal{L} y \ .$$

Exemple

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $E = F = \mathbb{R}^{m \times n}$*. Soit* $A \in E$*. Alors l'application*

$$\forall X \in E, \quad \mathcal{L} X = AX \in E$$

est linéaire.

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension m et n, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ une base de E, $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ une base de F et $\mathcal{L} : E \to F$ une application linéaire.

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension m et n, $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de F et $\mathcal{L} : E \to F$ une application linéaire. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathcal{L}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\mathcal{E}) = (\mathcal{L}e_1, \ldots, \mathcal{L}e_m)$ est la matrice de $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{F}$

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension m et n, $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de F et $\mathcal{L} : E \to F$ une application linéaire. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathcal{L}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\mathcal{E}) = (\mathcal{L}e_1, \ldots, \mathcal{L}e_m)$ est la matrice de $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{F}$: i.e., pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$\mathcal{L}e_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

est la coordonnées de $\mathcal{L}e_j$ dans la base $\mathcal{F}$.

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension m et n, $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de F et $\mathcal{L} : E \to F$ une application linéaire. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathcal{L}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\mathcal{E}) = (\mathcal{L}e_1, \ldots, \mathcal{L}e_m)$ est la matrice de $\mathcal{L}$ dans la base $\mathcal{F}$ ou encore, pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$\mathcal{L}e_j = a_{1,j} f_1 + \ldots + a_{n,j} f_n = f a_j$$

où $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}^t$ et $a_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

En particulier, pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \ldots x_m e_m = eX$, on a par linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}eX = \mathcal{L}(x) &= x_1 \mathcal{L}(e_1) + x_m \mathcal{L}(e_m) \\ &= x_1 f a_1 + \ldots + x_m f a_m \\ &= fAX \end{aligned}$$

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

En particulier, pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \dots x_m e_m = eX$, on a par linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}eX = \mathcal{L}(x) &= x_1 \mathcal{L}(e_1) + x_m \mathcal{L}(e_m) \\ &= x_1 f a_1 + \dots + x_m f a_m \\ &= fAX \end{aligned}$$

- On identifie $\mathcal{L}e = fA$.

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

En particulier, pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \ldots x_m e_m = eX$, on a par linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}eX = \mathcal{L}(x) &= x_1 \mathcal{L}(e_1) + x_m \mathcal{L}(e_m) \\ &= x_1 f a_1 + \ldots + x_m f a_m \\ &= fAX \end{aligned}$$

- On identifie $\mathcal{L}e = fA$.
- Dans le cas $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$ munis des bases canoniques, on identifie $\mathcal{L}$ à A de manière à considérer la matrice de $\mathcal{L}$ comme (une application)

$$A \in \mathbb{R}^{n,m} \Longleftrightarrow A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Matrice d'une application linéaire

Tous les e.v sont supposés de dimension finis

En particulier, pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \dots x_m e_m = eX$, on a par linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}eX = \mathcal{L}(x) &= x_1 \mathcal{L}(e_1) + x_m \mathcal{L}(e_m) \\ &= x_1 f a_1 + \dots + x_m f a_m \\ &= fAX \end{aligned}$$

- On identifie $\mathcal{L}e = fA$.
- Dans le cas $E = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n$ munis des bases canoniques, on identifie $\mathcal{L}$ à A de manière à considérer la matrice de $\mathcal{L}$ comme (une application)

$$A \in \mathbb{R}^{n,m} \Longleftrightarrow A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

- Changement de base = multiplication par une matrice

Exemples

- Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 17 \end{pmatrix}$ d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ de leur base canonique notée e et f resp. Alors

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f_1 + 2f_2 \\ f(e_2) &= 9f_2 \\ f(e_3) &= -f_1 + 17f_2 \end{aligned}$$

Exemples

- Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 17 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$. Alors

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 2X - 7X^2 \\ f(X) &= 9X + 8X^2 \\ f(X^2) &= -1 + 17X \end{aligned}$$

Exemples

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ de l'application linéaire f de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F}$ de $F = \mathbb{R}^3$. Soit les bases $\mathcal{E}' = (e'_1 = (0,1), e'_2 = (1,0))$ et $\mathcal{F}' = (f'_1 = (1,1,1), f'_2 = (1,1,0), f'_3 = (1,0,0))$. Alors

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} f = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemples

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ de l'application linéaire f de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F}$ de $F = \mathbb{R}^3$. Soit les bases $\mathcal{E}' = (e_1' = (0,1), e_2' = (1,0))$ et $\mathcal{F}' = (f_1' = (1,1,1), f_2' = (1,1,0), f_3' = (1,0,0))$. Alors

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} f = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$f((0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff Ae_1' = Q\alpha,\ Q = [f_1', f_2', f_3'] \text{ et } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$$

Exemples

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ de l'application linéaire f de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F}$ de $F = \mathbb{R}^3$. Soit les bases $\mathcal{E}' = (e_1' = (0,1), e_2' = (1,0))$ et $\mathcal{F}' = (f_1' = (1,1,1), f_2' = (1,1,0), f_3' = (1,0,0))$. Alors

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} f = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$f((0,1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff Ae_1' = Q\alpha$, $Q = [f_1', f_2', f_3']$ et $\alpha = (\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -2)^T$

Exemples

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ de l'application linéaire f de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F}$ de $F = \mathbb{R}^3$. Soit les bases $\mathcal{E}' = (e_1' = (0,1), e_2' = (1,0))$ et $\mathcal{F}' = (f_1' = (1,1,1), f_2' = (1,1,0), f_3' = (1,0,0))$. Alors

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} f = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$f((1,0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff Ae_2' = Q\beta$, $Q = [f_1', f_2', f_3']$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$

Exemples

- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ de l'application linéaire f de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F}$ de $F = \mathbb{R}^3$. Soit les bases $\mathcal{E}' = (e_1' = (0,1), e_2' = (1,0))$ et $\mathcal{F}' = (f_1' = (1,1,1), f_2' = (1,1,0), f_3' = (1,0,0))$. Alors

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} f = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$AP = QA', \text{i.e., } A' = Q^{-1}AP$$

avec

$$P = [e_1', e_2'] \text{ et } A' = [\alpha, \beta]$$

Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des bases de E et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des bases de F. Soient les matrices $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ et $Q = Q_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$. Soient $A = Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \ .$$

Changements de base

matrice de passage

Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des bases de E et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des bases de F. Soient les matrices $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ et $Q = Q_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$. Soient $A = \mathit{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $A' = \mathit{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \ .$$

- *On appelle P (resp. Q) matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$) $\mathit{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(I_d)$ (resp. $\mathit{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(I_d)$)*

Changements de base

matrice de passage

Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des bases de E et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des bases de F. Soient les matrices $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ et $Q = Q_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$. Soient $A = Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f)$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP \ .$$

- *On appelle P (resp. Q) matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$) $Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(I_d)$ (resp. $Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(I_d)$)*
- *On dit que les matrices A et A' sont semblables*

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Réduction matricielle

Definition

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = 0$ où p_A est le polynôme caractéristique de A. On note $\mathsf{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, p \leqslant n\}$ (spectre de A) l'ensemble des valeurs propres de A. On note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.

Réduction matricielle

Definition

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = 0$ où p_A est le polynôme caractéristique de A. On note Sp$(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, p \leqslant n\}$ (spectre de A) l'ensemble des valeurs propres de A. On note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.
- On dit $X \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ is $AX = \lambda X$. On note $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_d)$ l'ensemble de ces vecteurs propres. On l'appelle le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Réduction matricielle

Definition

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = 0$ où p_A est le polynôme caractéristique de A. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, p \leqslant n\}$ (spectre de A) l'ensemble des valeurs propres de A. On note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ.
- On dit $X \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ is $AX = \lambda X$. On note $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_d)$ l'ensemble de ces vecteurs propres. On l'appelle le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
- On dit que p_A est scindé sur $\mathbb{K}$ si

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_{\lambda_p}}$$

où $\sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i} = n$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si

1. *p_A est scindé sur $\mathbb{K}$*

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si

1. *p_A est scindé sur $\mathbb{K}$*
2. *$\forall \lambda \in Sp(A)$, $dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$*

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si

1. p_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$
2. $\forall \lambda \in Sp(A)$, $dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une matrice de passage $P = (X_1 X_2 \dots X_n)$ formée des vecteurs propres X_i, une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tel que $D = P^{-1}AP$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si

1. *p_A est scindé sur $\mathbb{K}$*
2. *$\forall \lambda \in Sp(A)$, $dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$*

Corollaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $p = n$ (i.e., les valeurs propres sont toutes distinctes). Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si

1. *p_A est scindé sur $\mathbb{K}$*
2. *$\forall \lambda \in Sp(A)$, $dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$*

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ normale (i.e. tel que $AA^* = A^*A$, par ex. hermitienne, unitaire).
Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et il existe une matrice de passage P unitaire, une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que $D = P^{-1}AP = P^T AP$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{K}$ *si et seulement si*

1. p_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$
2. $\forall \lambda \in Sp(A)$, $dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$

Théorème (Décomposition de Schur)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.* A *est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$ *si et seulement si* p_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$*. Si* A *est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$ *alors il existe une matrice unitaire* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, une matrice triangulaire (supérieure)* $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *où* $T_{ii} = \lambda_i \in Sp(A)$, $i = 1, \ldots, n$ *telle que* $T = P^{-1}AP = P^T AP$ *.*

Outline

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?
- "Oui" ! Il existe toujours une matrice "pseudo" - inverse à

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?
- "Oui" ! Il existe toujours une matrice "pseudo" - inverse à
  - gauche $A^{-L} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $A^{-L}A = I_m$ de sorte que

$$AA^{-L}A = A(A^{-L}A) = A$$

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?
- "Oui" ! Il existe toujours une matrice "pseudo" - inverse à
  - gauche $A^{-L} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $A^{-L}A = I_m$ de sorte que

$$AA^{-L}A = A(A^{-L}A) = A$$

  - ou à droite $A^{-R} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $AA^{-R} = I_n$ de sorte que

$$AA^{-R}A = (AA^{-R})A = A$$

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?
- "Oui" ! Il existe toujours une matrice "pseudo" - inverse à
  - gauche $A^{-L} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $A^{-L}A = I_m$ de sorte que
  $$AA^{-L}A = A(A^{-L}A) = A$$
  - ou à droite $A^{-R} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $AA^{-R} = I_n$ de sorte que
  $$AA^{-R}A = (AA^{-R})A = A$$
  - On a pas unicité de ces matrices !

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?
- "Oui" ! Il existe toujours une matrice "pseudo" - inverse à
  - gauche $A^{-L} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $A^{-L}A = I_m$ de sorte que

$$AA^{-L}A = A(A^{-L}A) = A$$

  - ou à droite $A^{-R} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $AA^{-R} = I_n$ de sorte que

$$AA^{-R}A = (AA^{-R})A = A$$

  - On a pas unicité de ces matrices !
  - sauf si $m = n$ et $\text{rang}(A) = n$ alors $A^{-L} = A^{-R} = A^{-1}$

Definitions et caractérisations

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x, b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ admet une solution unique lorsque $\det(A) \neq 0$
- Quand est il si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$? Peut on inverser cette matrice ?
- "Oui" ! Il existe toujours une matrice "pseudo" - inverse à
  - gauche $A^{-L} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $A^{-L}A = I_m$ de sorte que

$$AA^{-L}A = A(A^{-L}A) = A$$

  - ou à droite $A^{-R} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $AA^{-R} = I_n$ de sorte que

$$AA^{-R}A = (AA^{-R})A = A$$

  - On a pas unicité de ces matrices !
  - sauf si $m = n$ et rang$(A) = n$ alors $A^{-L} = A^{-R} = A^{-1}$
  - ou bien $m \neq n$ + propriétés additionnelles $\Rightarrow$ pseudo-inverse Moore-Penrose

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

- $A^{-L} = (3, -1)$ est une matrice pseudo-inverse à gauche de A puisque $A^{-L}A = 1$

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

- $A^{-L} = (3, -1)$ est une matrice pseudo-inverse à gauche de A puisque $A^{-L}A = 1$
- $A^{-L} = (1 - 2\beta, \beta)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ est une matrice pseudo-inverse à gauche de A

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

- $A^{-L} = (3, -1)$ est une matrice pseudo-inverse à gauche de A puisque $A^{-L}A = 1$
- $A^{-L} = (1 - 2\beta, \beta)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ est une matrice pseudo-inverse à gauche de A
- Pas de matrice pseudo-inverse à droite pour cet exemple

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Caractérisation algébrique

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *matrice de rang* r. *Alors il existe une unique matrice pseudo-inverse* G *qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $AGA = A$

.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Caractérisation algébrique

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *matrice de rang* r. *Alors il existe une unique matrice pseudo-inverse* G *qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $AGA = A$
2. $GAG = G$

.

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *matrice de rang* r*. Alors il existe une unique matrice pseudo-inverse* G *qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. $AGA = A$
2. $GAG = G$
3. $GA = (GA)^*$

.

Propriété

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ matrice de rang r. Alors il existe une unique matrice pseudo-inverse G qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $AGA = A$
2. $GAG = G$
3. $GA = (GA)^*$
4. $AG = (AG)^*$

On appelle cette matrice G, la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose (1956) et on la note $G = A^+$.

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Avec $G = (3, -1)$, on a

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Avec $G = (3, -1)$, on a
  1. $AGA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Avec $G = (3, -1)$, on a
  1. $AGA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$
  2. $GAG = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) = (3, -1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = G$

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Avec $G = (3, -1)$, on a
  1. $AGA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$
  2. $GAG = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) = (3, -1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = G$
  3. $GA = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ et $(GA)^T = 1$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Avec $G = (3, -1)$, on a
  1. $AGA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$
  2. $GAG = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) = (3, -1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = G$
  3. $GA = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ et $(GA)^T = 1$
  4. $AG = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \neq (AG)^T$

Un exemple

m=1,n=2

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Avec $G = (3, -1)$, on a
  1. $AGA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A$
  2. $GAG = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3, -1) = (3, -1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = G$
  3. $GA = (3, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ et $(GA)^T = 1$
  4. $AG = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \neq (AG)^T$
- Avec $G = A^+ = (1/5, 2/5)$ ça marche !

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Caractérisation séquentielle et propriétés

En pratique,

- pour des "petites" matrices, on cherche algébriquement $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Caractérisation séquentielle et propriétés

En pratique,

- pour des "petites" matrices, on cherche algébriquement $A^+ \in \mathbb{K}^{n \times m}$ si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.
- pour des "grandes" matrices, on utilise la caractérisation séquentielle (1972)

En pratique,

- pour des "petites" matrices, on cherche algébriquement $A^+ \in \mathbb{K}^{n\times m}$ si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
- pour des "grandes" matrices, on utilise la caractérisation séquentielle (1972)

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A^+ = \lim_{h\to 0}(A^T A + h^2 I)^{-1}A^T = \lim_{h\to 0} A^T(AA^T + h^2 I)^{-1}$$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Caractérisation séquentielle et propriétés

En pratique,

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A^+ = \lim_{h \to 0} (A^T A + h^2 I)^{-1} A^T = \lim_{h \to 0} A^T (AA^T + h^2 I)^{-1}$$

- Conséquence : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors
  - $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (AA^T)^+$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Caractérisation séquentielle et propriétés

En pratique,

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A^+ = \lim_{h \to 0} (A^T A + h^2 I)^{-1} A^T = \lim_{h \to 0} A^T (A A^T + h^2 I)^{-1}$$

- Conséquence : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors
  - $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (A A^T)^+$
  - $(A^T)^+ = (A^+)^T$

En pratique,

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Alors*

$$A^+ = \lim_{h \to 0} (A^T A + h^2 I)^{-1} A^T = \lim_{h \to 0} A^T (AA^T + h^2 I)^{-1}$$

- Conséquence : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors
  - $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (AA^T)^+$
  - $(A^T)^+ = (A^+)^T$
  - $(A^+)^+ = A$

En pratique,

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Alors*

$$A^+ = \lim_{h \to 0} (A^T A + h^2 I)^{-1} A^T = \lim_{h \to 0} A^T (A A^T + h^2 I)^{-1}$$

- Conséquence : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors
  - $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (A A^T)^+$
  - $(A^T)^+ = (A^+)^T$
  - $(A^+)^+ = A$
  - $(A^T A)^+ = A^+ (A^T)^+$

En pratique,

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Alors*

$$A^+ = \lim_{h \to 0} (A^T A + h^2 I)^{-1} A^T = \lim_{h \to 0} A^T (A A^T + h^2 I)^{-1}$$

- Conséquence : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors
  - $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (A A^T)^+$
  - $(A^T)^+ = (A^+)^T$
  - $(A^+)^+ = A$
  - $(A^T A)^+ = A^+ (A^T)^+$
  - $(A A^T)^+ = (A^T)^+ A^+$

En pratique,

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Alors*

$$A^+ = \lim_{h\to 0}(A^T A + h^2 I)^{-1} A^T = \lim_{h\to 0} A^T (AA^T + h^2 I)^{-1}$$

- Conséquence : soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors
  - $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (AA^T)^+$
  - $(A^T)^+ = (A^+)^T$
  - $(A^+)^+ = A$
  - $(A^T A)^+ = A^+ (A^T)^+$
  - $(AA^T)^+ = (A^T)^+ A^+$
- Applications : SVD, QR, ...

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $b \in \mathbb{R}^m$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ $(\mathcal{P})$.

Théorème (Existence)

- *Il existe une solution à* $(\mathcal{P})$ *ssi* $b \in$ *Im*$(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ $(\mathcal{P})$.

Théorème (Existence)

- *Il existe une solution à* $(\mathcal{P})$ *ssi* $b \in$ *Im*$(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$
- *Il existe une solution à* $(\mathcal{P})$ *ssi Im*$(A) = \mathbb{R}^m$ *(i.e.* A *est surjective, rang*$(A) = m \leqslant \min(m, n)$ *)*

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ $(\mathcal{P})$.

Théorème (Existence)

- *Il existe une solution à* $(\mathcal{P})$ *ssi* $b \in$ *Im*$(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$
- *Il existe une solution à* $(\mathcal{P})$ *ssi Im*$(A) = \mathbb{R}^m$ *(i.e.* A *est surjective, rang*$(A) = m \leqslant \min(m,n)$ *)*
  - *soit* $m = n$ *et* A *non singulière alors il existe une unique solution à* $(\mathcal{P})$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $b \in \mathbb{R}^m$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ $(\mathcal{P})$.

Théorème (Existence)

- *Il existe une solution à $(\mathcal{P})$ ssi $b \in$ Im$(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$*
- *Il existe une solution à $(\mathcal{P})$ ssi Im$(A) = \mathbb{R}^m$ (i.e. A est surjective, rang$(A) = m \leqslant \min(m,n)$)*
  - *soit $m = n$ et A non singulière alors il existe une unique solution à $(\mathcal{P})$*
  - *soit $m < n$ et il existe une infinité de solutions à $(\mathcal{P})$ (cas sous-déterminé)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ $(\mathcal{P})$.

Théorème (Existence)

- *Il existe une solution à $(\mathcal{P})$ ssi $b \in$ Im$(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$*
- *Il existe une solution à $(\mathcal{P})$ ssi Im$(A) = \mathbb{R}^m$ (i.e. A est surjective, rang$(A) = m \leqslant \min(m,n)$)*
  - *soit $m = n$ et A non singulière alors il existe une unique solution à $(\mathcal{P})$*
  - *soit $m < n$ et il existe une infinité de solutions à $(\mathcal{P})$ (cas sous-déterminé)*
- *Il existe une solution unique à $(\mathcal{P})$ ssi Ker$(A) = 0$*
  (i.e. dim$(\mathbb{R}^n)$ = dimIm(A) + dimker$(A) = n \leqslant \min(m,n)$, A est injective, donc bijective : cas sur-déterminé).

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Existence)

  Im$(B) := \{Bv;\ v \in \mathbb{R}^n\} \subset$ *Im*$(A) := \{AY;\ Y \in \mathbb{R}^{n\times k}\} \iff AA^+B = B$ *Si* $AA^+B = B$ *alors il existe une solution à* $(\mathcal{P})$.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Existence)

  $Im(B) := \{Bv;\ v \in \mathbb{R}^n\} \subset Im(A) := \{AY;\ Y \in \mathbb{R}^{n\times k}\} \iff AA^+B = B$ Si $AA^+B = B$ alors il existe une solution à $(\mathcal{P})$.

  - En effet, supposons que $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $BV = AY$. Or, $AA+A = A$, on a donc $BV = AY = AA^+ABV$. Puisque V est arbitraire, on en déduit le résultat.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Existence)

  Im$(B) := \{Bv;\ v \in \mathbb{R}^n\} \subset$ *Im*$(A) := \{AY;\ Y \in \mathbb{R}^{n\times k}\} \Longleftrightarrow AA^+B = B$ *Si* $AA^+B = B$ *alors il existe une solution à* $(\mathcal{P})$.

  - En effet, supposons que $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $BV = AY$. Or, $AA + A = A$, on a donc $BV = AY = AA^+ABV$. Puisque V est arbitraire, on en déduit le résultat.
  - Réciproquement, si $B = AA^+B = AY$ avec $Y = A^+B$ alors $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Existence)

  $Im(B) := \{Bv;\ v \in \mathbb{R}^n\} \subset Im(A) := \{AY;\ Y \in \mathbb{R}^{n\times k}\} \iff AA^+B = B$ Si $AA^+B = B$ alors il existe une solution à $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Solution)

  Toutes les solutions de $\mathcal{P}$ sont de la forme
  $X = A^+B + (I - A^+A)Y, \quad Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Existence)

  $Im(B) := \{Bv;\ v \in \mathbb{R}^n\} \subset Im(A) := \{AY;\ Y \in \mathbb{R}^{n\times k}\} \Longleftrightarrow AA^+B = B$ Si $AA^+B = B$ alors il existe une solution à $(\mathcal{P})$.

- Théorème (Solution)

  Toutes les solutions de $\mathcal{P}$ sont de la forme
  $X = A^+B + (I - A^+A)Y, \quad Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

  En effet,

$$\begin{array}{rcll} AX & = & AA^+B + A(I - A^+A)Y & \text{puisque} \quad B = AA^+B \\ & = & B + (A - AA^+A)Y & \text{puisque} \quad AA^+A = A \\ & = & B & \end{array}$$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Les résultats ci-dessous s'applique avec $k = 1$ au cas précédent.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, trouver $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tel que $AX = B$ $(\mathcal{P})$.

- **Théorème (Existence)**

  $Im(B) := \{Bv;\ v \in \mathbb{R}^n\} \subset Im(A) := \{AY;\ Y \in \mathbb{R}^{n\times k}\} \iff AA^+B = B$ Si $AA^+B = B$ alors il existe une solution à $(\mathcal{P})$.

- **Théorème (Solution)**

  Toutes les solutions de $\mathcal{P}$ sont de la forme
  $X = A^+B + (I - A^+A)Y, \quad Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

- **Théorème (Solution)**

  Une solution de $\mathcal{P}$ est unique ssi $A^+A = I$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$

Remarque

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{+} = A^{-1}$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Remarque

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^+ = A^{-1}$
- *conséquence :* $X = A^+B + (I - A^+A)Y = A^{-1}B$ *prend son sens "unique"*

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$

Remarque

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^+ = A^{-1}$
- *conséquence :* $X = A^+B + (I - A^+A)Y = A^{-1}B$ *prend son sens "unique"*
- *la solution particulière* $X = A^+B + (I - A^+A)Y$ *avec* $Y = 0$ *minimise Tr*$(X^TX) := \sum_{i,j} x_{i,j}^2$.

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$

Remarque

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^+ = A^{-1}$
- *conséquence :* $X = A^+B + (I - A^+A)Y = A^{-1}B$ *prend son sens "unique"*
- *la solution particulière* $X = A^+B + (I - A^+A)Y$ *avec* $Y = 0$ *minimise Tr*$(X^TX) := \sum_{i,j} x_{i,j}^2$.
- *Lorsque* $k = 1$, *i.e,* $b \in \mathbb{R}^m$, *alors* $X \in \mathbb{R}^n$ *et Tr*$(X^TX) := \|X\|_2$

Pseudo-inverse Moore-Penrose

Applications à la résolution d'un système linéaire quelconque : $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$

Remarque

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et* $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^+ = A^{-1}$
- *conséquence :* $X = A^+B + (I - A^+A)Y = A^{-1}B$ *prend son sens "unique"*
- *la solution particulière* $X = A^+B + (I - A^+A)Y$ *avec* $Y = 0$ *minimise Tr*$(X^TX) := \sum_{i,j} x_{i,j}^2$.
- *Lorsque* $k = 1$, *i.e,* $b \in \mathbb{R}^m$, *alors* $X \in \mathbb{R}^n$ *et Tr*$(X^TX) := \|X\|_2$
- *On peut généraliser à un système* $AXC = B$ *où* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$. *On montre que ce système admet une solution si* $AA^+BC^+C = B$ *et admet une solution sous la forme* $X = A^+BC^+Y - A^+AYCC^+$ *pour* $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ *quelconque.*