To do

Outline

Résolution exacte ou approchée des systèmes linéaires

- Deux classes de méthodes :
  - méthodes directes
  - méthodes itératives

Résolution exacte ou approchée des systèmes linéaires

- Deux classes de méthodes :
  - méthodes directes : nombre fini d'étapes
    - LU : coût $O(2n^3/3)$
    - Cholesky : coût $O(n^3/3))$
  - méthodes itératives : nombre infini d'étapes (limite d'une suite)
    - Jacobi : $k\times$coût Cx
    - Gauss-Seidel : $k\times$coût Cx
    - Gradient Conjugué : $k\times$coût Cx
  - choix des méthodes
    - efficacité théorique de l'algorithme à comparer à $O(n+1!)$

Résolution exacte ou approchée des systèmes linéaires

- Deux classes de méthodes :
  - méthodes directes : nombre fini d'étapes
    - LU : mineur principaux inv soit par stratégie de Pivot
    - Cholesky : s.d.p
    - résultats imprécis si mauvais conditionnement
  - méthodes itératives : nombre infini d'étapes (limite d'une suite)
    - Jacobi : diag. strict dominante
    - Gauss-Seidel : s.d.p
    - Gradient Conjugué : mais convergence en n itérations (s.d.p)
  - choix des méthodes
    - efficacité théorique de l'algorithme à comparer à $O(n+1!)$
    - type de matrice (pleine, creuse, ...)

Résolution exacte ou approchée des systèmes linéaires

- Deux classes de méthodes :
  - méthodes directes : nombre fini d'étapes
    - LU :
    - Cholesky :
    - résultats imprécis si mauvais conditionnement
    - petite dimension
  - méthodes itératives : nombre infini d'étapes (limite d'une suite)
    - Jacobi :
    - Gauss-Seidel :
    - Gradient Conjugué :
    - Grande dimension
  - choix des méthodes
    - efficacité théorique de l'algorithme à comparer à $O(n+1!)$
    - type de matrice (pleine, creuse, ...)
    - Stockage en mémoire & architecture machine

Outline

Exemple en hydraulique : déterminer les pressions aux noeuds d'un réseau de conduit de longueur L_i et de résistance hydraulique R_i

- p_0 pression atm (supposée 0)
- p_i pression aux noeuds (aux extrémités $p_i = 0$)
- Δp_i pression entre l'entrée et la sortie d'une conduite i

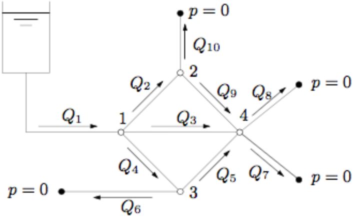


Figure: Un réseau de conduite (Quarteroni, EDP Sci.)

Exemple en hydraulique : déterminer les pressions aux noeuds d'un réseau de conduit de longueur L_i et de résistance hydraulique R_i

- $Q_i = \dfrac{\Delta p_i}{R_i L_i}$
- $\sum_i Q_{n,i} = 0$ au noeud i (valeur négative $=$ fuite non considérée ici)

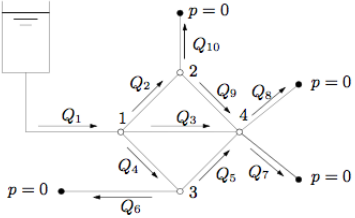


Figure: Un réseau de conduite (Quarteroni, EDP Sci.)

Exemple en hydraulique : déterminer les pressions aux noeuds d'un réseau de conduit de longueur L_i et de résistance hydraulique R_i

- $Q_i = \dfrac{\Delta p_i}{R_i L_i}$
- $\sum_i Q_{n,i} = 0$ au noeud i (valeur négative = fuite non considérée ici)
- $\rightarrow$ à un système linéaire $Ap = b$ où $A \in M_4(\mathbb{R})$.

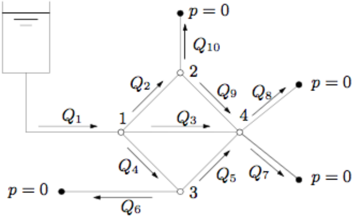


Figure: Un réseau de conduite (Quarteroni, EDP Sci.)

Exemple en chimie (spectrométrie de masse) : déterminer les éléments d'un gaz constitué de n composants non-réactifs inconnus

- On ne considère que les n pics les plus significatifs

Exemple en chimie (spectrométrie de masse) : déterminer les éléments d'un gaz constitué de n composants non-réactifs inconnus

- On ne considère que les n pics les plus significatifs
- Chaque pic de hauteur $h_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} p_j$
  - où p_j est la pression partielle du j-ème composant
  - s_{ij} les coefficients dits de sensibilité

Exemple en chimie (spectrométrie de masse) : déterminer les éléments d'un gaz constitué de n composants non-réactifs inconnus

- On ne considère que les n pics les plus significatifs
- Chaque pic de hauteur $h_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} p_j$
  - où p_j est la pression partielle du j-ème composant
  - s_{ij} les coefficients dits de sensibilité
- soit donc le système linéaire

$$Sp = h$$

Exemple en physique : déterminer l'évolution de la chaleur T d'une plaque mince refroidis à ses extrémités soumis une source de chaleur f

- T vérifie l'équation de la chaleur 2D sur Ω

$$T_t(x,t) - \Delta T(x,t) = f(x,t)$$

Exemple en physique : déterminer l'évolution de la chaleur T d'une plaque mince refroidis à ses extrémités soumis une source de chaleur f

- T vérifie l'équation de la chaleur 2D sur Ω

$$T_t(x,t) - \Delta T(x,t) = f(x,t)$$

- Méthode des différences finies ou éléments finis conduits à la résolution d'un système linéaire pour tout temps t

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\delta t} - A_h T^{n+1} = F^n \text{ ou encore } T^{n+1}(I - \delta t A_h) = \delta t F$$

avec A_h matrice tridiagonale par bloc

$$A_h = \mathrm{diag}(C, -1) + \mathrm{diag}(J, 0) + \mathrm{diag}(C, 1)$$

où $C = \dfrac{-1}{h^2} I_n$ et $J = \dfrac{-1}{h^2}\mathrm{diag}(1, -1) + \mathrm{diag}(4, 0) + \mathrm{diag}(1, 1)$

Exemple en physique : déterminer l'évolution de la chaleur T d'une plaque mince refroidis à ses extrémités soumis une source de chaleur f

- T vérifie l'équation de la chaleur 2D sur Ω

$$T_t(x,t) - \Delta T(x,t) = f(x,t)$$

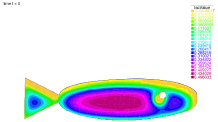


Figure: Approximation numérique par éléments finis de l'équation de la chaleur 2D

Outline

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

Trouver (λ, x) tel que

$$Ax = \lambda x$$

- Si A est diagonale ou tridiagonale, c'est triviale

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

Trouver (λ, x) tel que

$$Ax = \lambda x$$

- Si A est diagonale ou tridiagonale, c'est triviale
- Sinon utilisation de méthodes itératives pour le calcul
  - de la plus grande ou plus petite en module (puissance et puissance inverse)

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

Trouver (λ, x) tel que
$$Ax = \lambda x$$

- Si A est diagonale ou tridiagonale, c'est triviale
- Sinon utilisation de méthodes itératives pour le calcul
  - de la plus grande ou plus petite en module (puissance et puissance inverse)
  - simultané de toutes les valeurs propres (e.g., via la factorisation QR (Matlab/Octave l'utilise lors de l'appel à `eig(A)`))

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

Trouver (λ, x) tel que

$$Ax = \lambda x$$

- Si A est diagonale ou tridiagonale, c'est triviale
- Sinon utilisation de méthodes itératives pour le calcul
  - de la plus grande ou plus petite en module (puissance et puissance inverse)
  - simultané de toutes les valeurs propres (e.g., via la factorisation QR (Matlab/Octave l'utilise lors de l'appel à `eig(A)`))
- Dans la plupart des cas en pratique, le calcul valeur propre de la plus grande ou plus petite en module c'est suffisant

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour la méthode calcul de la plus grande valeur propre en module (puissance) λ_1
  - CV si les vecteurs propres sont linéairement indépendants

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour la méthode calcul de la plus grande valeur propre en module (puissance) λ_1
  - CV si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
  - CV même si λ_1 est valeur propre multiple

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour la méthode calcul de la plus grande valeur propre en module (puissance) λ_1
  - CV si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
  - CV même si λ_1 est valeur propre multiple
  - Ne CV pas si il existe deux valeurs propres distinctes de module maximal

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour la méthode calcul de la plus grande valeur propre en module (puissance) λ_1
  - CV si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
  - CV même si λ_1 est valeur propre multiple
  - Ne CV pas si il existe deux valeurs propres distinctes de module maximal
  - Vitesse de convergence dépend du quotient $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour la méthode calcul de la plus grande valeur propre en module (puissance) λ_1
  - CV si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
  - CV même si λ_1 est valeur propre multiple
  - Ne CV pas si il existe deux valeurs propres distinctes de module maximal
  - Vitesse de convergence dépend du quotient $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$
- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour la méthode calcul de la plus petite valeur propre en module (puissance inverse) λ_n
  - CV vers $\dfrac{1}{\lambda_n}$ si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
  - CV même si λ_n est valeur propre multiple
  - Ne CV pas même si il existe deux valeurs propres distinctes de module maximal
  - Vitesse de convergence dépend du quotient $\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

Pour la méthode des calculs des valeurs propres (simultané) en particulier pour QR

- CV si $\forall(\lambda, \mu) \in (\mathsf{Sp}(A))^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \mu$

Problèmes aux valeurs propres/vecteurs propres

Pour la méthode des calculs des valeurs propres (simultané) en particulier pour QR

- CV si $\forall(\lambda,\mu) \in (\mathsf{Sp}(A))^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \mu$
- Vitesse de convergence dépend du plus grand du plus grand quotient des modules de deux valeurs propres successives.

Outline

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Un modèle basé sur le taux de mortalité et de fécondité pour différentes tranches d'âge $i = 0, \ldots, n$. Les mâles n'interviennent pas dans ce modèle.

- $x_i(t)$ nb de femelles dont l'âge au temps t appartient à la tranche i
- $x_i(0)$ donnée initiale

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Un modèle basé sur le taux de mortalité et de fécondité pour différentes tranches d'âge $i = 0, \ldots, n$. Les mâles n'interviennent pas dans ce modèle.

- $x_i(t)$ nb de femelles dont l'âge au temps t appartient à la tranche i
- $x_i(0)$ donnée initiale
- s_i le taux de survie des femelles de la i-ème tranche qui passe à la tranche $i+1$

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Un modèle basé sur le taux de mortalité et de fécondité pour différentes tranches d'âge $i = 0, \dots, n$. Les mâles n'interviennent pas dans ce modèle.

- $x_i(t)$ nb de femelles dont l'âge au temps t appartient à la tranche i
- $x_i(0)$ donnée initiale
- s_i le taux de survie des femelles de la i-ème tranche qui passe à la tranche $i + 1$
- m_i le nombre moyen de femelles engendrées par des femelles de la i-ème tranche

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Le modèle de Lotka-Leslie est donné par

$$
\begin{array}{rclll}
x_{i+1}(t+1) & = & x_i(t)s_i & i=0,\ldots,n & \text{dév. de la population} \\
x_0(t+1) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i(t)m_i & & \text{reprod. de la population}
\end{array}
$$

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Le modèle de Lotka-Leslie est donné par

$$\begin{array}{rcll} x_{i+1}(t+1) & = & x_i(t)s_i \qquad i=0,\ldots,n & \text{dév. de la population} \\ x_0(t+1) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i(t)m_i & \text{reprod. de la population} \end{array}$$

ou encore

$$x(t+1) = Ax(t)$$

où $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ et A la matrice de Leslie

$$A = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \ldots & \ldots & m_n \\ s_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & s_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Alors :

- remplaçons t par t_k et $x(t)$ par x^k :

$$x^1 = Ax^0, \quad , x^2 = Ax^1 = A^2x^0, \quad x^k = A^kx^0$$

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Alors :

- remplaçons t par t_k et $x(t)$ par x^k :

$$x^1 = Ax^0, \quad , x^2 = Ax^1 = A^2x^0, \quad x^k = A^kx^0$$

- normalisons par la population totale

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Alors :

- remplaçons t par t_k et $x(t)$ par x^k :

$$x^1 = Ax^0, \quad , x^2 = Ax^1 = A^2x^0, \quad x^k = A^kx^0$$

- normalisons par la population totale
- alors $k \to \infty$ (i.e, $t \to \infty$) donne
  - la valeur propre de module maximal de A, λ_1 qui décrit la dynamique de cette population

Exemple dynamique des populations (Lotka-Leslie)

Alors :

- remplaçons t par t_k et $x(t)$ par x^k :

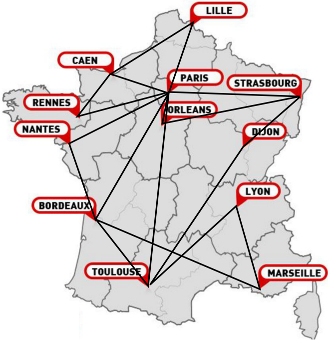
$$x^1 = Ax^0, \quad , x^2 = Ax^1 = A^2x^0, \quad x^k = A^k x^0$$

- normalisons par la population totale
- alors $k \to \infty$ (i.e, $t \to \infty$) donne
  - la valeur propre de module maximal de A, λ_1 qui décrit la dynamique de cette population
  - $Ax = \lambda_1 x$ décrit distribution des individus dans les différentes tranches d'âge

Exemple SNCF : un réseau ferroviaire d'exception ...

Soit n villes. On note A la matrice de connectivité donnée par

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{cases} 1 & \text{si la ième ville est connecté à la jème} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



1 Paris
2 Lille
3 Strasbourg
4 Orléans
5 Dijon
6 Lyon
7 Marseille
8 Toulouse
9 Bordeaux
10 Nantes
11 Rennes
12 Caen

Exemple SNCF : un réseau ferroviaire d'exception ...

Soit n villes. On note A la matrice de connectivité donnée par

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{cases} 1 & \text{si la ième ville est connecté à la jème} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour l'exemple ci-dessous on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Exemple SNCF : un réseau ferroviaire d'exception ...

Soit n villes. On note A la matrice de connectivité donnée par

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{cases} 1 & \text{si la ième ville est connecté à la jème} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre que la ville la mieux desservie correspond au plus grand module du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre
On trouve ici

$$x = \begin{pmatrix} 0.5846 & 0.2341 & 0.2619 & 0.2282 & 0.1588 & 0.1224 & 0.1267 & 0.3271 & 0.3477 & \dots \end{pmatrix}^T$$

tel que $Ax = \lambda_1 x$ avec $\lambda_1 \approx 4.7093$.

Pour être plus "réaliste" il faudrait prendre en compte la fréquence des trains ...

Autres exemples

- Compression d'images
  - image en noir et blanc $= A$ matrice rectangulaire de taille $m \times n$

Autres exemples

- Compression d'images
  - image en noir et blanc $= A$ matrice rectangulaire de taille $m \times n$
  - $a_{ij} =$ niveau de gris du pixel (i, j)

Autres exemples

- Compression d'images
  - image en noir et blanc $=A$ matrice rectangulaire de taille $m \times n$
  - a_{ij} $=$ niveau de gris du pixel (i,j)
  - compression $=$ garder les k premières valeurs singulières (valeurs propres si $m=n$) classées par ordre décroissant

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)
  - On définit la matrice de Google G comme dans le cas ferroviaire ! ! ! mais à l'instar $g_{ii} = 0$, $g_{ij} = 1$ si j pointe vers i

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)
  - On définit la matrice de Google G comme dans le cas ferroviaire ! ! ! mais à l'instar $g_{ii} = 0$, $g_{ij} = 1$ si j pointe vers i
  - Chaque page à un nb totale de liens $N_j = \sum_{k=1}^{N} g_{kj}$

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)
  - On définit la matrice de Google G comme dans le cas ferroviaire ! ! ! mais à l'instar $g_{ii} = 0$, $g_{ij} = 1$ si j pointe vers i
  - Chaque page à un nb totale de liens $N_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} g_{kj}$
  - On définit la matrice Q avec $q_{ij} = \dfrac{g_{ij}}{N_j}$ si $N_j \neq 0$ et 0

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)
  - On définit la matrice de Google G comme dans le cas ferroviaire ! ! ! mais à l'instar $g_{ii} = 0$, $g_{ij} = 1$ si j pointe vers i
  - Chaque page à un nb totale de liens $N_j = \sum_{k=1}^{N} g_{kj}$
  - On définit la matrice Q avec $q_{ij} = \dfrac{g_{ij}}{N_j}$ si $N_j \neq 0$ et 0
  - Chaque page i à un score $r_i \geqslant 0$ donnée par

$$r_i = \sum_{j=1}^{N} q_{ij} r_j \Leftrightarrow r = Qr$$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)
  - On définit la matrice de Google G comme dans le cas ferroviaire ! ! ! mais à l'instar $g_{ii} = 0$, $g_{ij} = 1$ si j pointe vers i
  - Chaque page à un nb totale de liens $N_j = \sum_{k=1}^{N} g_{kj}$
  - On définit la matrice Q avec $q_{ij} = \dfrac{g_{ij}}{N_j}$ si $N_j \neq 0$ et 0
  - Chaque page i à un score $r_i \geqslant 0$ donnée par

$$r_i = \sum_{j=1}^{N} q_{ij} r_j \Leftrightarrow r = Qr$$

  - Le problème de classement des pages est donc ramené à la recherche d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1

Autres exemples

- Page ranking de Google : définir un score (score élevé=visibilité)
  - On définit la matrice de Google G comme dans le cas ferroviaire ! ! ! mais à l'instar $g_{ii} = 0$, $g_{ij} = 1$ si j pointe vers i
  - Chaque page à un nb totale de liens $N_j = \sum_{k=1}^{N} g_{kj}$
  - On définit la matrice Q avec $q_{ij} = \dfrac{g_{ij}}{N_j}$ si $N_j \neq 0$ et 0
  - Chaque page i à un score $r_i \geqslant 0$ donnée par

$$r_i = \sum_{j=1}^{N} q_{ij} r_j \Leftrightarrow r = Qr$$

  - Le problème de classement des pages est donc ramené à la recherche d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1
  - En 2010, N était de l'ordre de 10^{10}

Outline

Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum $=$ "meilleur" p/r à un "coût" J

Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum = "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes) soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $J : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{x \in \Omega} J(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leqslant 0 \\ h(x) = 0, \end{array} \right.$$

avec $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^i$ et $h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^e$. On note

$$X = \{x \in \Omega, \;\; g(x) \leqslant 0, \;\; h(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum $=$ "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
  lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et $(\mathcal{P})$ devient simplement

$$(\mathcal{P}) \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$$

Optimisations : généralités

- optimisation $\stackrel{latin}{:=}$ optimum = "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
- Existence si il existe x^* tel que

$$J(x^*) = \min \{J(x); \;\; x \in X\}$$

alors on dit que

- le problème $(\mathcal{P})$ est réalisable

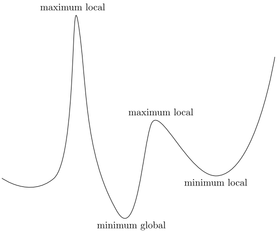
Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum = "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
- Existence si il existe x^* tel que

$$J(x^*) = \min \{J(x); \ \ x \in X\}$$

alors on dit que

- le problème $(\mathcal{P})$ est réalisable et x^* réalise un min. de J sur X



Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum $=$ "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
- Existence
- Unicité (global ! ! !)

Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum = "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
- Existence
- Unicité (global ! ! !)
- Maximisation ou minimisation c'est pareille ! ! ! puisque

$$\max\{J(x),\, x \in X\} = -\min\{-J(x),\, x \in X\}.$$

Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum $=$ "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
- Existence
- Unicité (global ! ! !)
- Maximisation ou minimisation c'est pareille ! ! !
- Peut-on calculer
  - exactement ? en générale non !

Optimisations : généralités

- optimisation $\overset{latin}{:=}$ optimum = "meilleur" p/r à un "coût" J
- Formulation mathématique générale (avec contraintes)
- Formulation mathématique générale (sans contraintes)
- Existence
- Unicité (global ! ! !)
- Maximisation ou minimisation c'est pareille ! ! !
- Peut-on calculer
  - exactement ? en générale non !
  - une approximation ? par une méthode itérative oui !

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage) : comment à partir d'une peau de boeuf" définir le périmètre d'une ville ?
  - découper cette peau en fines lanières de longueur l

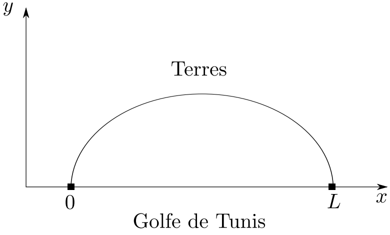


Figure: Problème de Didon

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage) : comment à partir d'une peau de boeuf" définir le périmètre d'une ville ?
  - découper cette peau en fines lanières de longueur l
  - "encercler" future ville (situé au bord de la mer de longueur L)

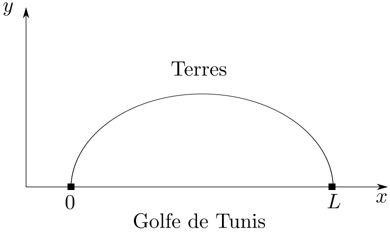


Figure: Problème de Didon

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage) : comment à partir d'une peau de boeuf" définir le périmètre d'une ville ?
  - découper cette peau en fines lanières de longueur l
  - "encercler" future ville (situé au bord de la mer de longueur L)
  - Question : comment maximiser la superficie ? ? ?
    - i.e. trouver $[0, L] \ni x \to y(x)$ tel que

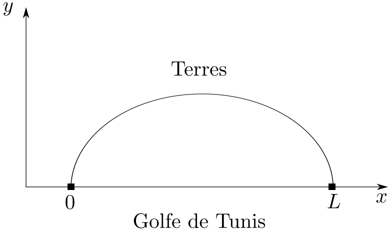


Figure: Problème de Didon

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage) : comment à partir d'une peau de boeuf" définir le périmètre d'une ville ?
  - découper cette peau en fines lanières de longueur l
  - "encercler" future ville (situé au bord de la mer de longueur L)
  - Question : comment maximiser la superficie ? ? ?
    - i.e. trouver $[0, L] \ni x \to y(x)$ tel que
    - $\max \int_0^L y(x)\,dx$

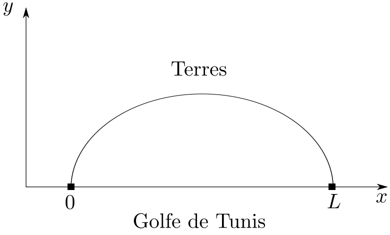


Figure: Problème de Didon

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage) : comment à partir d'une peau de boeuf" définir le périmètre d'une ville ?
  - découper cette peau en fines lanières de longueur l
  - "encercler" future ville (situé au bord de la mer de longueur L)
  - Question : comment maximiser la superficie ? ? ?
    - i.e. trouver $[0, L] \ni x \to y(x)$ tel que
    - $\max \int_0^L y(x)\, dx$
    - sous les contraintes

$$L \geqslant 0, \quad y(0) = 0, \quad l = \int_0^L \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

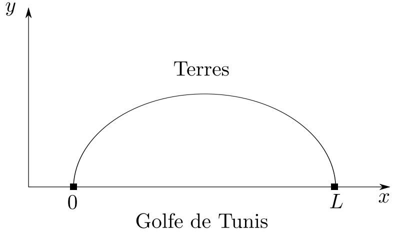


Figure: Problème de Didon

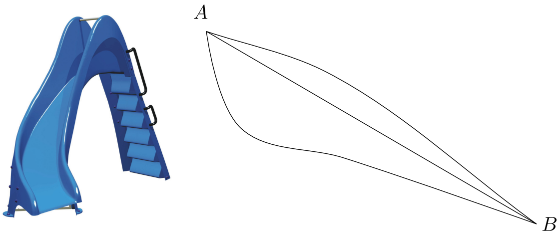
Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon A l'équilibre, une bulle de savon minimise sa surface sous la contrainte de volume fixé pour minimiser son énergie.

Figure: La bulle de savon.

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide Minimiser le temps de descente ? ? ?



(a) (b)

Figure: Problème du toboggan .

$\rightarrow$ la courbe brachistochrone (posé en 1696 Jean Bernouilli)

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres Par exemple, par l'expérience on peut obtenir un échantillons $[t_i, y_i]_{i=1,\ldots,m}$ d'une loi empirique $f(t; a, b, c, d)$ dépendant de paramètres (a, b, c, d). Comment identifier (a, b, c, d) ? ? ? En minimisant, par exemple la fonctionnelle

$$J(a,b,c,d) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i - f(t_i))^2 .$$

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  - On considère une corde horizontale de longueur 1 fixée à ses extrémités via une tension τ. On note $u(x)$, $x \in [0, 1]$ la déviation de la corde par rapport à l'origine.

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  - On considère une corde horizontale de longueur 1 fixée à ses extrémités via une tension τ. On note $u(x)$, $x \in [0,1]$ la déviation de la corde par rapport à l'origine.
  - Énergie potentielle associée à une déformation donnée est

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \tau \left(\frac{d}{dx}u(x)\right)^2 dx.$$

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  - On considère une corde horizontale de longueur 1 fixée à ses extrémités via une tension τ. On note $u(x)$, $x \in [0, 1]$ la déviation de la corde par rapport à l'origine.
  - Énergie potentielle associée à une déformation donnée est

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \tau \left(\frac{d}{dx} u(x) \right)^2 dx.$$

  - $\min E(u)$ est atteint $u(x) \equiv 0$

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  - On ajoute un obstacle $v(x) \geqslant 0, x \in [0, 1]$.

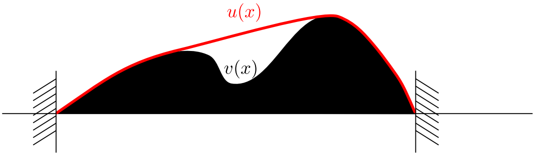


Figure: Corde et obstacle.

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  - On ajoute un obstacle $v(x) \geqslant 0, x \in [0,1]$.
  - Que vaut $\min E(u)$ en présence de l'obstacle ?

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  - On ajoute un obstacle $v(x) \geqslant 0, x \in [0,1]$.
  - Que vaut $\min E(u)$ en présence de l'obstacle ?
  - Il faut résoudre le problème $(\mathcal{P})$

$$\left\{\begin{array}{c} \min\limits_{u\in\Omega} E(u) \\ \text{sous les contraintes} \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u(x) \geqslant v(x). \end{array}\right.$$

Quelques exemples

- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
  On montre que ce problème se ramène à

$$\left\{\begin{array}{c} \min\limits_{U} E_n(U) \\ \text{sous les contraintes} \\ G \leqslant 0 \quad j = 0 \dots N \end{array}\right.$$

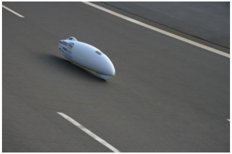
où

$$E_n(U) = \frac{1}{2} U^t A U,$$

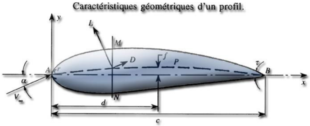
$$A = \frac{\tau}{N^2}(-\mathsf{diag}(-1) + 2\mathsf{diag}(0) - \mathsf{diag}(1)) \ .$$

Quelques exemples

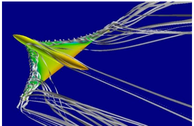
- Problème de Didon (Fondation de Carthage)
- Bulles de savon
- Le toboggan le plus rapide
- Identification de paramètres
- En méca (*problème de calcul des variations*)
- Exemples industriels



(a) Voiture peu originale



(b) Aile d'avion



Résultats d'existence

- "Presque tout" vient du théorème de Weierstass (compacité)

Theorem

Soit J une fonction continue de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors J est borné et atteint ses bornes. En particulier, le problème de minimisation

$$\min\{J(x);\ \ x \in [a,b]\}$$

admet au moins une solution.

Résultats d'existence

- "Presque tout" vient du théorème de Weierstass (compacité)
- Par conséquent l'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ (compacité)

Theorem

Soit X un sous ensemble fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}^n$ et J une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Alors le problème

$$\min\{J(x); x \in X\}$$

admet au moins une solution.

Résultats d'existence

- "Presque tout" vient du théorème de Weierstass (compacité)
- Par conséquent l'équivalent dans $\mathbb{R}^n$ (compacité)
- Si pas de compacité alors

Theorem

Soit X un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et J une fonctionnelle continue. Si X est non borné et $\lim_{\|x\| \to \pm\infty} J(x) = +\infty$ (coercivité= fonction infini à l'infini) alors le problème

$$\min\{J(x); x \in X\}$$

admet au moins une solution.

- $J(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$ est coercive
- $J(x) = (Ax, x) - (b, x)$ est coercive si $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive
- $J(x) = (b, x) + c$ n'est pas coercive

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes

Definition

- Un ensemble C est dit convexe si $\forall (x, y) \in C^2$

$$\forall \lambda \in [0,1], \;\; \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

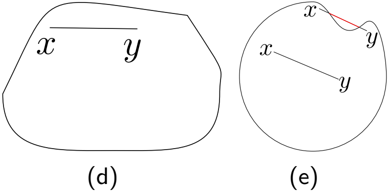


Figure: Exemple d'ensemble convexe (gauche) et non convexe (à droite).

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes

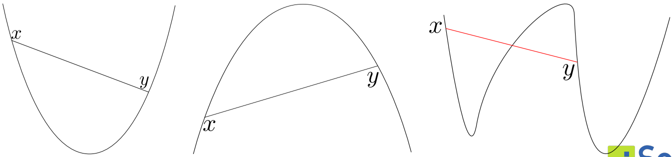
Definition

- Un ensemble C est dit convexe si $\forall (x,y) \in C^2$

$$\forall \lambda \in [0,1], \;\; \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

- Une fonction J est dite convexe si $\forall (x,y) \in C^2$

$$\forall \lambda \in [0,1], \;\; J(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$



(a) convexe (b) concave (c) ni convexe ni concave

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes

Definition

- Un ensemble C est dit convexe si $\forall(x, y) \in C^2$

$$\forall \lambda \in [0,1], \;\; \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

- Une fonction J est dite convexe si $\forall(x, y) \in C^2$

$$\forall \lambda \in [0,1], \;\; J(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$

- Une fonction J est dite strictement convexe si $\forall(x, y) \in C^2$, $x \neq y$

$$\forall \lambda \in [0,1], \;\; J(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
  - $J(x) = (Ax, x) - (b, x)$ est convexe si $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique semi-définie positive
  - $J(x) = (Ax, x) - (b, x)$ est st+ convexe si $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité

Theorem (Continuité)

Toute fonction convexe propre (i.e. $\{x; J(x) < \infty\} \neq \emptyset$) sur un espace de dimension finie est continue sur l'intérieure de son domaine.

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Definition

On dit que J est Gâteau-différentiable en $u \in \mathbb{R}^n$ si la dérivée directionnelle $J'(u;v) = \lim_{t\to 0, t>0} \dfrac{J(u+tv)-J(u)}{t}$ existe dans toutes les directions $v \in \mathbb{R}^n$ et l'application $v \mapsto J'(u;v)$ est linéaire continue.

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Definition

On dit que J est Gâteau-différentiable en $u \in \mathbb{R}^n$ si la dérivée directionnelle $J'(u;v) = \lim_{t \to 0, t>0} \dfrac{J(u+tv) - J(u)}{t}$ existe dans toutes les directions $v \in \mathbb{R}^n$ et l'application $v \mapsto J'(u;v)$ est linéaire continue.

Pour $J(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, soit $y \in \mathbb{R}^n$ $t > 0$ alors

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Pour $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, soit $y \in \mathbb{R}^n$ $t > 0$ alors

$$
\begin{aligned}
J(x+ty) &= \frac{1}{2}(A(x+ty), x+ty) - (b, x+ty) \\
&= J(x) + \frac{t}{2}\left((Ax, y) + (Ay, x) - 2(b, y)\right) + \frac{t^2}{2}(Ay, y) \\
&= J(x) + t\left(\frac{(A + A^T)}{2}x - b, y\right) + \frac{t^2}{2}(Ay, y)
\end{aligned}
$$

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Pour $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$, soit $y \in \mathbb{R}^n$ $t > 0$ alors

$$\begin{aligned}
J'(x;y) &= \lim_{t\to 0, t>0} \frac{J(u+tv) - J(v)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\left(\frac{(A + A^T)}{2} x - b, y \right) + \frac{t^2}{2}(Ay, y) \right) \\
&= \left(\frac{(A + A^T)}{2} x - b, y \right)
\end{aligned}$$

Si A est symétrique alors

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Pour $J(x) = \dfrac{1}{2}(Ax,x) - (b,x)$, soit $y \in \mathbb{R}^n$ $t > 0$ alors

$$\begin{aligned} J'(x;y) &= \lim_{t\to 0, t>0} \frac{J(u+tv) - J(v)}{t} \\ &= \nabla J(x)\cdot y \end{aligned}$$

Si A est symétrique alors

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Proposition (Caractérisation du premier ordre)

Soit J une fonction Gâteau différentiable de C (convexe) dans $\mathbb{R}^n$. Alors J est convexe si et seulement si

$$\forall (u,v) \in C^2, \quad J(v) \geqslant J(u) + (\nabla J(u), v-u).$$

C'est l'analogue de la tangente au dessous du graphe de J en dimension 1.

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Proposition (Caractérisation du second ordre)

Soit $J \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Alors

- *J est convexe si et seulement si $D^2 J$ est symétrique et semi définie positive en tout point de $\mathbb{R}^n$.*
- *Si $D^2 J$ est symétrique et définie positive en tout point de $\mathbb{R}^n$ alors J est strictement convexe .*

Par exemple, A symétrique et $J(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ alors

- $\nabla J(x) = Ax - b$
- $D^2 J(x) = A$

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité

Résultat d'unicité : rôle de la convexité

- Les ensembles et les fonctions convexes
- Propriétés des fonctions convexes : continuité & dérivabilité
- Résultats d'unicité

Theorem

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *strictement convexe. Alors le problème* $\mathcal{P}$ *admet une unique solution.*

Conditions d'optimalité (cas sans contraintes)

- Conditions d'optimalité du premier ordre

Theorem (CN du premier ordre)

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteau différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Si x^* réalise un minimum (local ou global) de J sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\nabla J(x^*) = 0.$$

Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation dite d'Euler $\nabla J(x^*) = 0$ est appelé point d'équilibre ou stationnaire.

Conditions d'optimalité (cas sans contraintes)

- Conditions d'optimalité du premier ordre

Theorem (CN du premier ordre)

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteau différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Si x^* réalise un minimum (local ou global) de J sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\nabla J(x^*) = 0.$$

Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation dite d'Euler $\nabla J(x^*) = 0$ est appelé point d'équilibre ou stationnaire.

Par exemple, A s.d.p. alors $(\mathcal{P})$ admet une unique solution et

$$\nabla J(x) = Ax - b = 0 \Leftrightarrow Ax = b$$

Conditions d'optimalité (cas sans contraintes)

- Conditions d'optimalité du premier ordre

Theorem (CNS du premier ordre cas convexe)

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteau différentiable sur $\mathbb{R}^n$. On suppose J convexe. Alors x^* réalise le minimum de J sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si x^* est un point d'équilibre.

Conditions d'optimalité (cas sans contraintes)

- Conditions d'optimalité du premier ordre
- Conditions d'optimalité du second ordre

Theorem

Supposons que J est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et x^* un minimum local de J. Alors

1. x^* *est un point d'équilibre*
2. $D^2J(x^*)$ *est semi-définie positive, i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (D^2J(x^*)x, x) \geqslant 0.$$

Conditions d'optimalité (cas sans contraintes)

- Conditions d'optimalité du premier ordre
- Conditions d'optimalité du second ordre

Theorem

Supposons que J est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

1. $\nabla J(x^*) = 0$,
2. $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (D^2 J(x^*)x, x) \geqslant \alpha \|x\|^2$.

Alors x^* est réalise un minimum local strict de J.

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
  - Construire $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x^{(1)}) < J(x^{(0)})$

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
  - Construire $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x^{(1)}) < J(x^{(0)})$
  - Or on peut toujours écrire

$$x^{(1)} = x^{(0)} + (x^{(1)} - x^{(0)}) = x^{(0)} + h^{(0)}d^{(0)}$$

  où
    - $h^{(0)} > 0$: pas de descente
    - $d^{(0)} = \dfrac{(x^{(1)} - x^{(0)})}{h^{(0)}} \in \mathbb{R}^n$: direction de descente

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
  - Construire $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x^{(0)} + h^{(0)}d^{(0)}) < J(x^{(1)})$

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
  - Construire $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x^{(0)} + h^{(0)} d^{(0)}) < J(x^{(1)})$
  - Choix de $d^{(0)}$
    - $\rightarrow$ idée ! ! ! Développement de Taylor :

$$J(x^{(0)} + h^{(0)} d^{(0)}) = J(x^{(0)}) + h^{(0)}(\nabla J(x^{(0)}), d^{(0)})$$
$$+ \left\| h^{(0)} d^{(0)} \right\| \varepsilon(h^{(0)} d^{(0)})$$

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
  - Construire $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x^{(0)} + h^{(0)}d^{(0)}) < J(x^{(1)})$
  - Choix de $d^{(0)}$
    - $\rightarrow$ idée ! ! ! Développement de Taylor :

$$J(x^{(0)} + h^{(0)}d^{(0)}) = J(x^{(0)}) + h^{(0)}(\nabla J(x^{(0)}), d^{(0)}) + \left\| h^{(0)}d^{(0)} \right\| \varepsilon(h^{(0)}d^{(0)})$$

    - Si $h^{(0)}$ "petit" $d^{(0)} = -\nabla J(x^{(0)})$

$$\Rightarrow J(x^{(0)}+h^{(0)}d^{(0)}) \approx J(x^{(0)})-h^{(0)}(\nabla J(x^{(0)}), \nabla J(x^{(0)})) \leqslant J(x^{(0)})$$

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
  - Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ donné
  - Construire $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ tel que $J(x^{(0)} + h^{(0)}d^{(0)}) < J(x^{(1)})$
  - Choix de $d^{(0)}$
  - $x^{(2)}$ t.q. $J(x^{(2)}) < J(x^{(1)})$ avec $d^{(1)} = -\nabla J(x^{(1)})$

$$\vdots$$

  - $x^{(k+1)}$ t.q. $J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)})$ avec $d^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)})$

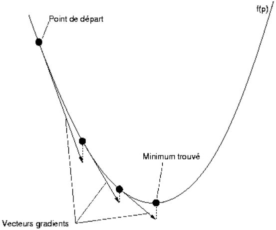


Figure: Principe de la méthode du gradient

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que

Algorithm 1 Algorithme du gradient

Require: $\varepsilon > 0, k = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ h_0 > 0$

1: **while** $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \geqslant \varepsilon$ **do**

2: $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - h^{(k)} \nabla J(x^{(k)})$

3: **end while**

4: **return** $x^{(k+1)}$

SeaTech
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
- Convergence

Theorem

Soit $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *coercive et strictement convexe. On suppose de plus que le gradient est Lipschitz :*

$$\exists K > 0;\ \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leqslant K \|x - y\|.$$

Alors la méthode converge vers le minimum de J *si* $h^{(k)} \in [\alpha, \beta]$ *où* $0 < \alpha < \beta < \dfrac{2}{K}$.

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
- Convergence
- Choix du pas de descente
  - si $\forall k$, $h = h^{(k)}$ alors méthode du gradient à pas constant

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
- Convergence
- Choix du pas de descente
  - si $\forall k$, $h = h^{(k)}$ alors méthode du gradient à pas constant
  - si $\forall k$, $h^{(k)}$ non constant alors méthode du gradient à pas variable (cv si J est ellitpique, i.e. si $\exists \alpha > 0; \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\nabla J(x) - \nabla J(y), x - y) \geqslant \alpha \|x - y\|^2$).

Méthode du gradient (la plus grande pente)

- Principe : construire une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que
- Convergence
- Choix du pas de descente
  - si $\forall k$, $h = h^{(k)}$ alors méthode du gradient à pas constant
  - si $\forall k$, $h^{(k)}$ non constant alors méthode du gradient à pas variable (cv si J est ellitpique, i.e. si $\exists\alpha > 0; \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\nabla J(x) - \nabla J(y), x-y) \geqslant \alpha \left\|x-y\right\|^2$). En particulier nous avons la méthode du pas optimale

---

Algorithm 2 Algorithme du gradient à pas optimal

Require: $\varepsilon > 0, k = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ h_0 > 0$

1: **while** $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \geqslant \varepsilon$ **do**

2: $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \nabla J(x^{(k)})$ où h_k réalise le minimum de $q(h) = J(x^{(k)} - h\nabla J(x^{(k)}))$.

3: **end while**

4: **return** $x^{(k+1)}$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M $=$ préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M $=$ préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Si $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ et A sym. alors

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M $=$ préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Si $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ et A sym. alors

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

donc

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\nabla J(x^{(k)})$$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M $=$ préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Si $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ et A sym. alors

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

donc

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\nabla J(x^{(k)})$$

i.e.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - M^{-1}\nabla J(x^{(k)})$$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M $=$ préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Si $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ et A sym. alors

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

donc

$$M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\nabla J(x^{(k)})$$

i.e.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - M^{-1}\nabla J(x^{(k)})$$

Si de plus $M^{-1} = hI_d$ alors on retrouve la méthode du gradient

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M = préconditionneur : $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu Les méthodes itératives sous la forme
  - $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = r^{(k)}$ sont dites "stationnaire"

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M = préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu Les méthodes itératives sous la forme
  - $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = r^{(k)}$ sont dites "stationnaire"
  - $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = h^{(k)}r^{(k)}$ sont dites "dynamiques"

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M = préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Compte tenu des résultats de convergence pour les méthodes itératives, les méthodes du gradient converge si $\rho(M^{-1}N) = \max_k \rho(h^{(k)}I_d - A) < 1$

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M = préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Compte tenu des résultats de convergence pour les méthodes itératives, les méthodes du gradient converge si
  $\rho(M^{-1}N) = \max_k \rho(h^{(k)} I_d - A) < 1$
- Dans la suite on considère les problèmes d'optimisations quadratiques, ie..

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

uniquement de par

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M = préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Compte tenu des résultats de convergence pour les méthodes itératives, les méthodes du gradient converge si
  $\rho(M^{-1}N) = \max_k \rho(h^{(k)} I_d - A) < 1$
- Dans la suite on considère les problèmes d'optimisations quadratiques, ie..

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

uniquement de par

  - leurs intérêts en optimisation en pratique

Remarque et retour aux méthodes itératives pour $Ax = b$

- $A = M - N = M - (M - A)$
- $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$
- M = préconditionneur :
  $M(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - b) = r^{(k)}$ résidu
- Compte tenu des résultats de convergence pour les méthodes itératives, les méthodes du gradient converge si
  $\rho(M^{-1}N) = \max_k \rho(h^{(k)} I_d - A) < 1$
- Dans la suite on considère les problèmes d'optimisations quadratiques, ie..

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

  uniquement de par
  - leurs intérêts en optimisation en pratique
  - le lien avec la résolution de systèmes linéaires

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors
  - le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors
  - le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution
  - le système $Ax = b$ admet une unique solution

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors
  - le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution
  - le système $Ax = b$ admet une unique solution
- La méthode du GC est basée sur une suite de vecteurs $(d^{(k)})$ A-orthogonaux

$$(Ad^{(j)})^T d^{(k+1)} = 0, \;\; j = 0, \dots, k$$

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

Algorithm 3 Algorithme du gradient conjugué

Require: $\varepsilon > 0, k = 0,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

while $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \geqslant \varepsilon$ **do**

$$h^{(k)} = \frac{{d^{(k)}}^T r^{(k)}}{{d^{(k)}}^T A d^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} d^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - h^{(k)} A d^{(k)}$$

$$g^{(k)} = \frac{(Ad^{(k)})^T r^{(k+1)}}{(Ad^{(k)})^T d^{(k)}}$$

$$d^{(k+1)} = r^{(k+1)} - g^{(k)} d^{(k)}$$

end while

return $x^{(k+1)}$

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

Algorithm 4 Algorithme du gradient conjugué

Require: $\varepsilon > 0, k = 0,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

1: **while** $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \geqslant \varepsilon$ **do**

2: $\quad h^{(k)} = \dfrac{{d^{(k)}}^T r^{(k)}}{{d^{(k)}}^T A d^{(k)}}$

3: $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} d^{(k)}$

4: $\quad r^{(k+1)} = r^{(k)} - h^{(k)} A d^{(k)}$

5: $\quad g^{(k)} = \dfrac{(Ad^{(k)})^T r^{(k+1)}}{(Ad^{(k)})^T d^{(k)}}$

6: $\quad d^{(k+1)} = r^{(k+1)} - g^{(k)} d^{(k)}$

7: **end while**

8: **return** $x^{(k+1)}$

- $h^{(k)}$ minimise $\left\| e^{(k+1)} \right\|_A = \sqrt{{e^{(k+1)}}^T A e^{(k+1)}}$ le long de la direction de descente $d^{(k)}$

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

Algorithm 5 Algorithme du gradient conjugué

Require: $\varepsilon > 0, k = 0,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

1: **while** $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \geqslant \varepsilon$ **do**

2: $\quad h^{(k)} = \dfrac{{d^{(k)}}^T r^{(k)}}{{d^{(k)}}^T A d^{(k)}}$

3: $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} d^{(k)}$

4: $\quad r^{(k+1)} = r^{(k)} - h^{(k)} A d^{(k)}$

5: $\quad g^{(k)} = \dfrac{(Ad^{(k)})^T r^{(k+1)}}{(Ad^{(k)})^T d^{(k)}}$

6: $\quad d^{(k+1)} = r^{(k+1)} - g^{(k)} d^{(k)}$

7: **end while**

8: **return** $x^{(k+1)}$

- construction de $x^{(k+1)}$ tel que $J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)})$

La redoutable méthode du Gradient Conjugué

Algorithm 6 Algorithme du gradient conjugué

Require: $\varepsilon > 0, k = 0,\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

while $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \geqslant \varepsilon$ **do**

$$h^{(k)} = \frac{{d^{(k)}}^T r^{(k)}}{{d^{(k)}}^T A d^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} d^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - h^{(k)} A d^{(k)}$$

$$g^{(k)} = \frac{(Ad^{(k)})^T r^{(k+1)}}{(Ad^{(k)})^T d^{(k)}}$$

$$d^{(k+1)} = r^{(k+1)} - g^{(k)} d^{(k)}$$

end while

return $x^{(k+1)}$

- $r^{(k+1)}$ et $g^{(k)}$ choisit de sorte que $(Ad^{(k)})^T d^{(k+1)} = 0$

Convergence de la méthode du GC

L'aspect "redoutable" est contenu dans ce théorème :

Theorem

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors En arithmétique exacte, la méthode itérative du GC converge en au plus n itération.

Convergence de la méthode du GC

L'aspect "redoutable" est contenu dans ce théorème :

Theorem

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors En arithmétique exacte, la méthode itérative du GC converge en au plus n itération.

- En l'absence d'erreur d'arrondi, on peut considérer GC comme une méthode directe

Convergence de la méthode du GC

L'aspect "redoutable" est contenu dans ce théorème :

Theorem

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors En arithmétique exacte, la méthode itérative du GC converge en au plus n itération.

- En l'absence d'erreur d'arrondi, on peut considérer GC comme une méthode directe
- Coût similaire à Cholesky matrice pleine mais très efficace pour les creuses

Convergence de la méthode du GC

L'aspect "redoutable" est contenu dans ce théorème :

Theorem

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors En arithmétique exacte, la méthode itérative du GC converge en au plus n itération.

- En l'absence d'erreur d'arrondi, on peut considérer GC comme une méthode directe
- Coût similaire à Cholesky matrice pleine mais très efficace pour les creuses
- On peut transformer la méthode avec un préconditionneur M sdp (c'est pcg dans Matlab)

Convergence de la méthode du GC

L'aspect "redoutable" est contenu dans ce théorème :

Theorem

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive. Alors En arithmétique exacte, la méthode itérative du GC converge en au plus n itération.

- En l'absence d'erreur d'arrondi, on peut considérer GC comme une méthode directe
- Coût similaire à Cholesky matrice pleine mais très efficace pour les creuses
- On peut transformer la méthode avec un préconditionneur M sdp (c'est `pcg` dans Matlab)
- Pour les systèmes non symétriques $\rightarrow$ GMRES (Generalized Minimum RESidual) (c'est `gmres` dans Matlab)
- ou encore $\rightarrow$ Bi-CGSTAB (BiConjugate Gradient STABilized) (c'est `bicgstab` dans Matlab)

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Exemple $(m = 2,\ n = 3)$

Avec

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{lcl} g_1(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \\ g_2(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \end{array} \right.$$

alors

$$X = \textit{Sphère 3D} \cap \textit{plan}$$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Exemple $(m = 2,\ n = 3)$

Avec

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{rcl} g_1(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \\ g_2(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \end{array} \right.$$

alors

$$X = \textit{Sphère 3D} \cap \textit{plan}$$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Exemple $(m = 2,\ n = 3)$

Avec

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{rcl} g_1(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \\ g_2(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \end{array} \right.$$

alors

$$X = \textit{Sphère 3D} \cap \textit{plan} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{soit un cercle} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Exemple $(m = 2,\ n = 3)$

Avec

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{lcl} g_1(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \\ g_2(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \end{array} \right.$$

alors

$$X = \textit{Sphère 3D} \cap \textit{plan} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{soit un cercle} \\ \textit{soit un point de contact} \\ \end{array} \right.$$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$

Exemple $(m = 2,\ n = 3)$

Avec

$$g(x,y,z) = \left\{ \begin{array}{lcl} g_1(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \\ g_2(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \end{array} \right.$$

alors

$$X = \textit{Sphère 3D} \cap \textit{plan} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{soit un cercle} \\ \textit{soit un point de contact} \\ \textit{soit le vide} \end{array} \right.$$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$
- Contraintes générales : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, h(x) \leqslant 0\}$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$
- Contraintes générales : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, h(x) \leqslant 0\}$

Exemple $(m = 1,\ p = 1,\ n = 3)$

Avec

$$\begin{array}{rcl} g(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \\ h(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \end{array}$$

alors

$$X = \textit{Boule 3D} \cap \textit{plan}$$

Signification des contraintes

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Contraintes égalités : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$
- Contraintes générales : $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, h(x) \leqslant 0\}$

Exemple $(m = 1,\ p = 1,\ n = 3)$

Avec

$$\begin{array}{rcl} g(x,y,z) & = & x + y + z - 1 \\ h(x,y,z) & = & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 25 \end{array}$$

alors

$$X = \textit{Boule 3D} \cap \textit{plan}$$

- Nous supposerons dans la suite $X \neq \emptyset$

Un exemple

Soit $J(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $X = \mathbb{R}^2$ alors on écrit
  $\nabla J(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0) \;\Rightarrow J(0,0) = \min J$

Un exemple

Soit $J(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $X = \mathbb{R}^2$
- Si $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4 - (x^2 + y^2) \leqslant 0\}$ alors
  $\nabla J(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \not\Rightarrow J(0,0) = \min J$

Un exemple

Soit $J(x,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $X = \mathbb{R}^2$
- Si $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4 - (x^2+y^2) \leqslant 0\}$ alors $\nabla J(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0) \;\not\Rightarrow J(0,0) = \min J$ mais le minimum est atteint sur $\{4 = (x^2+y^2)\}$ et $\nabla J(x,y) \neq (0,0)$

Un exemple

Soit $J(x, y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $X = \mathbb{R}^2$
- Si $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4 - (x^2 + y^2) \leqslant 0\}$
- Si $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x^2 + y^2) - 4 \leqslant 0\}$ en revanche dans ce cas le minimum est atteint en $(0, 0)$ et $\nabla J(x, y) = 0$.
- ATTENTION : l'équation $\nabla J(x) = 0$ ne permet pas nécessairement de sélectionner des candidats pour les problèmes sous contraintes

Cas des contraintes égalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$. On suppose que les m vecteurs ∇g_k sont linéairement indépendant.

- Points stationnaires

Theorem (Multiplicateurs de Lagrange)

Soit x^* un minimum local de J sur X. Alors

$$\exists! \lambda_k \ , k = 1, \dots, m, \ \nabla J(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(x^*) = 0$$

Cas des contraintes égalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$. On suppose que les m vecteurs ∇g_k sont linéairement indépendant.

- Points stationnaires

Theorem (Multiplicateurs de Lagrange)

Soit x^* un minimum local de J sur X. Alors

$$\exists ! \lambda_k \ , k = 1, \ldots, m, \ \nabla J(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(x^*) = 0$$

- $\lambda_k =$ multiplicateurs de Lagrange

Cas des contraintes égalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$. On suppose que les m vecteurs ∇g_k sont linéairement indépendant.

- Points stationnaires

Theorem (Multiplicateurs de Lagrange)

Soit x^* un minimum local de J sur X. Alors

$$\exists ! \lambda_k \ , k = 1, \dots, m, \ \nabla J(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(x^*) = 0$$

ou encore

$$\exists ! \lambda_k \ , k = 1, \dots, m, \ \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0$$

- λ_k = multiplicateurs de Lagrange
- $\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$ = Lagrangien

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Cas des contraintes égalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$. On suppose que les m vecteurs ∇g_k sont linéairement indépendant.

- Points stationnaires et $\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$

Theorem

$x^* \in X$ satisfait $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0$ si et seulement si

$$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda) = \left\{ \begin{array}{lcl} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) & = & 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda) = g(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

Cas des contraintes égalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$. On suppose que les m vecteurs ∇g_k sont linéairement indépendant.

- Points stationnaires et $\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$
- Intérêt : transformer un problème sous contrainte pour J en un problème sans contraintes pour $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^{n+m}$

Cas des contraintes égalités et inégalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0,\ h(x) \leqslant 0\}$. On suppose que les $m + p$ vecteurs ∇g_k et ∇h_k sont linéairement indépendant. On définit

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h_k(x)$$

- Points stationnaires

Theorem (Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Si $x^* \in X$ réalise le minimum de J sur X alors

- $\exists! \lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^p_+$ *t.q.* $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant p$, $\mu_k = 0$ *si* $h_k < 0$, $\forall x \in X$.

Cas des contraintes égalités et inégalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0,\ h(x) \leqslant 0\}$. On suppose que les $m + p$ vecteurs ∇g_k et ∇h_k sont linéairement indépendant. On définit

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h_k(x)$$

- Points stationnaires

Theorem (Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Si $x^* \in X$ réalise le minimum de J sur X alors

- $\exists! \lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^p_+$ *t.q.* $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant p$, $\mu_k = 0$ *si* $h_k < 0$, $\forall x \in X$.

- (λ, μ) sont les multiplicateurs de Lagrange-KKT

Cas des contraintes égalités et inégalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0,\ h(x) \leqslant 0\}$. On suppose que les $m + p$ vecteurs ∇g_k et ∇h_k sont linéairement indépendant. On définit

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h_k(x)$$

- Points stationnaires

Theorem (Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Si $x^* \in X$ réalise le minimum de J sur X alors

  - $\exists ! \lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^p_+$ *t.q.* $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$
  - $\forall 1 \leqslant k \leqslant p$, $\mu_k = 0$ *si* $h_k < 0$, $\forall x \in X$.

- $k$ème contrainte h_k inactive si $h_k < 0$

Cas des contraintes égalités et inégalités

Soit le problème $(\mathcal{P})$ avec $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0,\ h(x) \leqslant 0\}$. On suppose que les $m + p$ vecteurs ∇g_k et ∇h_k sont linéairement indépendant. On définit

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = J(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h_k(x)$$

- Points stationnaires

Theorem (Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Si $x^* \in X$ réalise le minimum de J sur X alors

- $\exists ! \lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^p_+$ *t.q.* $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) = 0$
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant p$, $\mu_k = 0$ *si* $h_k < 0$, $\forall x \in X$.

- $k$ème contrainte inactive $\Rightarrow$ contrainte ne compte pas $\mu_k = 0$

Un exemple

Soit le problème $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $J(x,y,z) = xyz$ et $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

- Contraintes égalités : $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$
- Contraintes inégalités : $h_1(x,y,z) = x$, $h_2(x,y,z) = y$, $h_1(x,y,z) = z$

Un exemple

Soit le problème $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $J(x,y,z) = xyz$ et $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

- Contraintes égalités : $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$
- Contraintes inégalités : $h_1(x,y,z) = x$, $h_2(x,y,z) = y$, $h_1(x,y,z) = z$
- ∇h et ∇g libre ssi $(x,y,z) \neq 0$

Un exemple

Soit le problème $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $J(x,y,z) = xyz$ et $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

- Contraintes égalités : $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$
- Contraintes inégalités : $h_1(x,y,z) = x$, $h_2(x,y,z) = y$, $h_1(x,y,z) = z$
- ∇h et ∇g libre ssi $(x,y,z) \neq 0$
- Conséquence $h_i(x,y,z) > 0$, $i = 1, 2, 3$

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Un exemple

Soit le problème $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $J(x,y,z) = xyz$ et $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

- Contraintes égalités : $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$
- Contraintes inégalités : $h_1(x,y,z) = x$, $h_2(x,y,z) = y$, $h_1(x,y,z) = z$
- ∇h et ∇g libre ssi $(x,y,z) \neq 0$
- Conséquence $h_i(x,y,z) > 0$, $i = 1,2,3$
- Contraintes inégalités sont toutes inactives $\rightarrow$ pb contrainte égalité

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Un exemple

Soit le problème $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $J(x,y,z) = xyz$ et $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

- Contraintes égalités : $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$
- Contraintes inégalités : $h_1(x,y,z) = x$, $h_2(x,y,z) = y$, $h_1(x,y,z) = z$
- ∇h et ∇g libre ssi $(x,y,z) \neq 0$
- Conséquence $h_i(x,y,z) > 0$, $i = 1,2,3$
- Contraintes inégalités sont toutes inactives $\rightarrow$ pb contrainte égalité
- On cherche (x,y,z) t.q. $\nabla J(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = 0$

Un exemple

Soit le problème $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $J(x,y,z) = xyz$ et $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

- Contraintes égalités : $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1$
- Contraintes inégalités : $h_1(x,y,z) = x$, $h_2(x,y,z) = y$, $h_1(x,y,z) = z$
- ∇h et ∇g libre ssi $(x,y,z) \neq 0$
- Conséquence $h_i(x,y,z) > 0$, $i = 1,2,3$
- Contraintes inégalités sont toutes inactives $\rightarrow$ pb contrainte égalité
- On cherche (x,y,z) t.q. $\nabla J(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = 0$
- On trouve $x = a/\sqrt{3}$, $y = b/\sqrt{3}$ et $z = c/\sqrt{3}$

Méthodes itératives

Ils existents deux approches

- méthodes primales qui consistent à générer $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ t.q.
  - $J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)})$

Méthodes itératives

Ils existents deux approches

- méthodes primales qui consistent à générer $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ t.q.
  - $J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)})$
  - $x^{(k+1)} \in X$,i.e., verification des contraintes

Méthodes itératives

Ils existents deux approches

- méthodes primales qui consistent à générer $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ t.q.
  - $J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)})$
  - $x^{(k+1)} \in X$,i.e., verification des contraintes
  - $x^{(k+1)}$ ne vérifie pas les contraintes en générale, il faut le "corriger", i.e. projeter sur X, $P(x^{(k+1)}) \in X$: difficile !

SeaTech ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Méthodes itératives

Ils existents deux approches

- méthodes primales qui consistent à générer $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ t.q.
  - $J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)})$
  - $x^{(k+1)} \in X$,i.e., verification des contraintes
  - $x^{(k+1)}$ ne vérifie pas les contraintes en générale, il faut le "corriger", i.e. projeter sur X, $P(x^{(k+1)}) \in X$: difficile !
  - Tous les algo vus précédemment peuvent être appliquer

Méthodes itératives

Ils existents deux approches

- méthodes primales
- méthodes duales basées sur le lagrangien $\mathcal{L}$

Méthodes itératives

Ils existents deux approches

- méthodes primales
- méthodes duales ...

Outline