Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Calcul matriciel numérique - Travaux Dirigés IV

Exercice 1.
Normes matricielles et Méthodes itératives.

1. Pour une matrice quelconque A :
   (a) Donner l'expression de $\|A\|_\infty$.
   (b) Montrer que $\rho(A) \leqslant \|A\|$ quelque soit la norme matricielle subordonnée.
   (c) Montrer que $\|A\|_2 = \rho(A)$ si A est symétrique.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Écrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
   (b) Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
   (c) Écrire la matrice G de l'itération de Gauss-Seidel.
   (d) Calculer $\rho(G)$. Pour quelles valeurs de a cette méthode converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

Exercice 2.
Soit A une matrice inversible décomposée en $A = D - E - F$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$$

pour résoudre $Ax = b$ on propose la méthode

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right) x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) x^{(k)} + b \quad \omega \in R^*.$$

a) Vérifier que si la méthode converge, elle converge vers la solution de $Ax = b$.
b) Donner la matrice d'itération L_ω de cette méthode.
c) Calculer $\det(L_\omega)$
d) En déduire que $\rho(L_\omega) \geq |1-\omega|$. Conclusion ?

Exercice 3 (Examen 2011-2012)**.**
On considère le systeme linéaire $Ay = b$, avec $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}$ et $b = \left(-\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$.

1. Trouver la valeur de $y = (y_1, y_2)$.
2. Calculer la décomposition LU de A.
3. Ecrire la méthode de Jacobi pour résoudre le systeme linéaire $Ay = b$.
4. Calculer la matrice d'itération J de la méthode de Jacobi, ses valeurs propres λ_1 et λ_2, son rayon spectral $\rho(J) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ et étudier la convergence.
5. On veut résoudre l'équation $-u''(x) + u(x) = f(x)$ pour $x \in [0,1]$ avec comme conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ et $f(x)$ donnée. Ecrire la méthode des différences finies de pas h pour approcher $u(x)$.

6. On suppose que $h = \frac{1}{3}$ et $f(x) = x^2 - x - 2$. Montrer que la méthode revient à résoudre le système $Ay = b$.
7. Vérifier que $u(x) = x(x-1)$ est solution de l'équation. Comparer $\left(u\left(\frac{1}{3}\right), u\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ avec (y_1, y_2). Conclusion ?

Exercice 4 (Examen 2012-2013)**.**

On s'intéresse à la résolution du système $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}$ dépend d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de a, A est-elle inversible ? On suppose dans toute la suite que $a > 1$.
2. Écrire la méthode de Jacobi, calculer sa matrice d'itération J, ainsi que $\rho(J)$ et montrer la convergence.
3. Même question avec la méthode de Gauss-Seidel.
4. On choisit $a = 10$ et x_0 tel que $\|Ax_0 - b\| = 1$. Donner le nombre d'étapes pour obtenir une erreur de l'ordre de 10^{-4} pour chacune des deux méthodes. Conclusion ?