Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Calcul matriciel numérique
Travaux Pratiques IV

Le but de ce TP est de d'étudier quelques méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires $Ax = b$. On note x^* la solution du problème.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer la matrice d'itération de la méthode de Jacobi et son rayon spectral (à l'aide d'Octave/Matlab) pour $a = 0.1$, $a = 0.7$ et $a = 2$.
2. Programmer 10 itérations de la méthode de Jacobi pour les valeurs de a précédentes. Donner l'approximation $x^{(k)}$ à l'itération $k = 10$ ainsi que l'erreur $\left\|Ax^{(k)} - b\right\|_2$. Que constatez-vous ?
3. Construire un programme qui s'arrête à une erreur à $\varepsilon = \left\|Ax^{(k)} - b\right\|_2$ donnée. Combien d'itérations sont nécessaires pour que la méthode converge vers x^* à une précision $\epsilon = 10^{-6}$.
4. Reprendre les questions 1–3 avec la méthode de Gauss-Seidel. Comparer vos résultats avec la méthode de Jacobi. Que constatez-vous ?
5. On utilise maintenant la méthode de relaxation par points

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right) x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right) x^{(k)} + b, \quad \omega \in R^*.$$

   (a) Écrire un programme permettant de calculer la solution x du système $Ax = b$ par cette méthode à $\varepsilon > 0$ près.
   (b) Pour les valeurs $a = 0.1$ et $a = 0.7$, étudier l'influence du paramètre ω en fonction du nombre d'itérations k nécessaires pour atteindre une erreur à $\varepsilon = 10^{-6}$ près. Comparer vos résultats à la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel. Conclusions.