Université de Toulon
SeaTech - 1ère année

Calcul matriciel numérique - Travaux Dirigés V

Exercice 1.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. En utilisant la méthode de la puissance itérée, calculer la plus grande valeur propre λ_1 de A et le vecteur propre associé x_1 en utilisant $x_0 = (1,0)^T$ à 0.01 près.
2. En utilisant la méthode de la puissance inverse, calculer la plus petite valeur propre λ_2 de A et le vecteur propre associé x_2 en utilisant $x_0 = (1,0)^T$ à 0.01 près.
3. Même question avec la méthode de déflation.

Exercice 2 (Élements propres du Laplacien 1D)**.**
On considère l'équation de la chaleur stationnaire unidimensionnel suivant :

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ \text{CL} \end{cases}$$

où f est une source de chaleur et CL désigne les conditions aux limites soit de Dirichlet soit de Neumann-Dirichlet :

$$\text{CL} = \begin{cases} \text{CL}_D : \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \text{conditions de Dirichlet,} \\ \text{CL}_M : \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \text{conditions mixtes Neumann-Dirichlet.} \end{cases}$$

1. **Fonctions propres et valeurs propres :**
   (a) Montrer qu'ils existent une infinité dénombrable de couples $(\lambda_k, u_k(\cdot))$ valeurs propres-fonctions propres ($u_k(\cdot)$ vérifie (P) avec $f(\cdot) = \lambda_k u_k(\cdot)$) du problème (P) muni des conditions aux limites CL_D. On note dans la suite les valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$.
   (b) Même question pour le problème (P) muni des conditions aux limites CL_M. On note dans la suite les valeurs propres $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$.
2. **Convergence vers l'état stationnaire :** on considère le problème non stationnaire

$$(NSP) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1) \\ \text{CL} \end{cases}$$

   muni de la condition initiale u_0 et des conditions aux limites CL.
   (a) Étudier la convergence de la solution $u(\cdot,t)$ lorsque $t \to \infty$ pour le problème (P) muni des conditions aux limites CL_D.

(b) Même question pour le problème (P) muni des conditions aux limites CL_M.

(c) Pourquoi les vitesses de convergences sont-elles différentes ? Peut-on donner une interprétation physique ?

3. **Fonctions propres et valeurs propres du problème discret :** dans toute la suite de l'exercice, on considère le problème (P) muni des conditions aux limites CL_D.

(a) Soit $h = \frac{1}{n}$ le pas de la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$. Donner la matrice de discrétisation A_h de l'opérateur u''.

(b) Montrer que les valeurs propres et fonctions propres pour $k = 1, \ldots, n-1$ sont

$$\begin{aligned} \lambda_k^h &= \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2}\right) \\ (u_{k,i}^h)_{1 \leqslant i \leqslant n-1} &= \sin(k\pi i h) \end{aligned}$$

(c) Étudier la convergence de λ_k^h vers λ_k lorsque $h \to 0$. Expliciter le lien entre les fonctions propres $u_k(\cdot)$ et les vecteurs propres $(u_{k,i}^h)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.