Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Calcul matriciel numérique
Travaux Pratiques V

Le but de ce TP est de d'étudier quelques méthodes itératives pour la recherche de vecteurs et valeurs propres.

Exercice 1.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 - \dfrac{3a}{4} & 2 - \dfrac{3a}{4} & \dfrac{9a}{4} - 8 \\ \dfrac{a+3}{4} & \dfrac{a+3}{4} & -\dfrac{3a+1}{4} \\ \dfrac{9-2a}{4} & \dfrac{5-2a}{4} & \dfrac{6a-15}{4} \end{pmatrix}$$

Pour $i = 1, 2, 3$, on note λ_i les valeurs propres de A et x_i les vecteurs propres associés tels que $\|x_i\| = 1$. On note $\lambda^{(k)}$ et $x^{(k)}$ les approximations à l'itération k d'une valeur propre λ et de son vecteur propre associé x. Suivant la méthode utilisée, (λ, x) désignera (λ_1, x_1) ou (λ_3, x_3), ou encore (λ_2, x_2). Dans la suite de l'exercice, on choisit comme vecteur d'initialisation $x^{(0)} = (1, 2, 3)^T$.

1. A l'aide de la commande `eig`, calculer les valeurs et vecteurs propres pour $a = -100$, $a = -2$, $a = -1.5$,$a = -1.1$ et $a = -1.001$.
2. Programmer 10 itérations de la méthode de la puissance pour chaque valeur de a. Pour chaque valeur de a, calculer l'erreur $\left\| Ax^{(10)} - \lambda^{(10)} x^{(10)} \right\|_2$. Que constatez-vous ?
3. Construire un programme qui s'arrête à une erreur à $\varepsilon = \left\| Ax^{(k)} - \lambda^{(k)} x^{(k)} \right\|_2$ donnée. Pour chaque valeur de a, combien d'itérations sont nécessaires pour que la méthode converge vers λ_1 pour une précision $\epsilon = 10^{-10}$. Commentez.
4. Reprendre les questions 1– 3 avec la méthode de la puissance inverse pour les valeurs $a = 0.95$, $a = 0.5$, $a = 0.1$, $a = 0.001$ et $a = 0$.

Exercice 2 (Élements propres du Laplacien 1D (c.f. exercice 2 feuille TD V))**.**
On considère l'équation de la chaleur stationnaire unidimensionnel suivant :

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \\ \text{CL} \end{cases}$$

où f est une source de chaleur et CL désigne les conditions aux limites soit de Dirichlet soit de Neumann-Dirichlet :

$$\text{CL} = \begin{cases} \text{CL}_D : & u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \text{conditions de Dirichlet}, \\ \text{CL}_M : & u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad \text{conditions mixtes Neumann-Dirichlet}. \end{cases}$$

1. **Convergence vers l'état stationnaire (FACULTATIF) :** on considère le problème non stationnaire

$$(NSP)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1) \\ \text{CL} \end{cases}$$

muni de la condition initiale u_0 et des conditions aux limites CL.

   (a) Montrer que l'équation (NSP) peut être approchée au sens des différences finies par
   $$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} + \frac{-u_{i-1}^m + 2u_i^m - u_{i+1}^m}{h^2} = 0$$
   où u_i^m, $i = 1, \ldots, n-1$ désigne une approximation de $u(x_i, t_m)$, δt désigne le pas de la subdivision en temps où $t_m = m\delta t$ (choisit suffisamment petit [1]), $h = 1/n$ le pas de la subdivision de l'intervalle $[0,1]$.

   (b) Comment peut-on approcher $u'(0) = 0$?

   (c) Étant donné u_0, en déduire une relation de récurrence permettant de calculer la solution approchée à tout instant t_m.

   (d) Utiliser les codes `HeatDirichlet.m` et `HeatMixte.m` pour illustrer numériquement la décroissance des solutions approchées pour les deux problèmes munis des conditions aux limites CL_D et CL_M. Tracer par exemple a tout instant, la norme $\|(u_i^m)_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|_2$ en fonction de t_m.

2. **Fonctions propres et valeurs propres du problème discret :** dans toute la suite de l'exercice, on considère le problème (P) muni des conditions aux limites CL_D.

   (a) Soit $h = \dfrac{1}{n}$ le pas de la subdivision de l'intervalle $[0,1]$. Donner la matrice de discrétisation A_h de l'opérateur u''.

   (b) A l'aide de la commande `eig(A)`,

      i. calculer les valeurs propres.

      ii. Vérifier que ces derniers correspondent à ceux calculer lors de la séance TD V.

      iii. Enfin, vérifier que lorsque h diminue, λ_1^h tend vers λ_1.

   (c) Reprendre les questions (b) i., (b) ii. et (b) iii. avec la méthode de la puissance inverse et calculer la plus petite valeur propre en module.

   (d) Reprendre les questions (b) i., (b) ii. avec la méthode de la déflation (pour n = 3, 5 et 10) et calculer toutes les valeurs propres.

1. c.f. second semestre