Université de Toulon
SeaTech - 1ère année

Calcul matriciel numérique
Travaux Pratiques VI

Le but de ce TP est de résoudre le Laplacien 1D par des chaines de Markov

1. Donner la solution analytique de l'équation
$$u''(x) = 0$$
pour x dans l'intervalle $[0,1]$ et avec les conditions aux limites $u(0) = a, u(1) = b$.
2. Donner la matrice A_h (de taille $n-1$) de discrétisation de l'équation précédente pour un pas $h = \frac{1}{n}$ et résoudre l'équation discrétisée pour différentes valeurs du pas h. Vérifier que cette solution u_i est toujours égale à la solution exacte. Pourquoi ?
3. On considère maintenant la chaine de Markov X_k à $n+1$ états $(0, 1, ..., n-1, n)$ telle que les états 0 et n soient absorbants et
$$P(X_{k+1} = i+1/X_k = i) = P(X_{k+1} = i-1/X_k = i) = \frac{1}{2}$$
pour $1 \leq i \leq n-1$. On rappelle que $u(i) = ap + b(1-p)$ oû p est la probabilité de sortir en zéro. Calculer numériquement p puis u_5 par une méthode de Monte-Carlo avec N simulations pour $n = 10$ et $N = 10, 100, 1000, 10000$. Comparer avec la valeur exacte.
4. Calculer maintenant toutes les valeurs de u_i pour $n = 10, 20$. Comparer avec la solution exacte.
5. On cherche maintenant à utiliser les états visités au cours d'une simulation en les interprétant comme des nouveaux points de départs de la chaine. Le programme Markov.m permet d'utiliser cette idée en faisant partir la chaine toujours du centre de la grille. Pour $n = 10$, vérifier l'efficacité du programme pour $N = 10, 100, 1000, 10000$.
6. Comparer les méthodes développées au 4. et au 5. en termes de temps de calcul et précision.