

Calcul matriciel numérique Travaux Pratiques VI

Le but de ce TP est de résoudre des systèmes linéaires $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.d.p. à l'aide de méthodes de gradient. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h = 1/(n+1)$. On considère la matrice A_h

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec $b = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. On note $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ les valeurs propres de cette matrice (c.f. TD 5/TP 5).

Exercice 1.

On fixe $n = 10$, la tolérance (seuil d'erreur) à $\epsilon = 10^{-6}$ et le nombre d'itérations max à 10^6 .

1. Construire un programme utilisant la méthode du gradient à pas constant qui s'arrête à une erreur à $\epsilon = \|Ax^{(k)} - b\|_2$ donnée.
 - (a) Étudier la convergence (ou non convergence) de la méthode en fonction de h . Tester en particulier les valeurs au voisinage de $h = \frac{2}{\lambda_n}$.
 - (b) Comment choisir le pas de descente h en pratique ?
2. Construire un programme utilisant la méthode du gradient à pas optimal qui s'arrête à une erreur à $\epsilon = \|Ax^{(k)} - b\|_2$ donnée. Tester votre programme et comparer vos résultats à ceux obtenus à la question 1. (a) pour (au moins) trois valeurs h de votre choix. Commenter.
3. Construire un programme utilisant la méthode du gradient conjugué qui s'arrête à une erreur à $\epsilon = \|Ax^{(k)} - b\|_2$ donnée. Tester votre programme et comparer vos résultats à ceux obtenus aux questions précédentes.

Exercice 2.

Pour la matrice A_h donnée par (1), sélectionner le meilleur algorithme dans la catégorie des méthodes directes, celles des méthodes itératives (Jacobi, GS, ...) et celles des méthodes itératives de "descente". Confronter ces méthodes : étudier l'erreur, le coût, le temps de calcul (voir la commande `cputime`) en fonction de la taille de la matrice. Conclusion ? Méthode directe ou méthode itérative ???¹

1. Pour cette exercice seulement vous pouvez utiliser les algorithmes (car optimisés) implémentés dans Octave/Matlab, à savoir `lu`, `chol`, `pcg` (gradient conjugué), ...