Université de Toulon
SeaTech - 1ère année

Calcul matriciel numérique - Travaux Dirigés VI-VII

Exercice 1.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonctionnelle $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$.

1. Montrer que la fonctionnelle J est (Gâteau-)différentiable dans toutes les directions $y \in \mathbb{R}^n$. En déduire que J est (Fréchet-)différentiable de vecteur gradient $\nabla J(x) = \frac{(A+A^T)}{2}x - b$.
2. Même question pour $x \in \mathbb{R}^n \to \nabla J(x)$. En déduire que la matrice Hessienne est donnée par $D^2 J(x) = \frac{(A+A^T)}{2}$.
3. On suppose A symétrique. Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un unique x^* qui réalise le minimum de J sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que x^* est l'unique solution du système linéaire
$$Ax^* = b \Longleftrightarrow J(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) \ .$$

Exercice 2 (Méthode du gradient à pas constant)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sdp et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la méthode du gradient à pas constant avec $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ pour la résolution du système linéaire $Ax = b$.

1. Montrer que les itérations $x^{(k)}$ donnée par la méthode du gradient à pas constant h vérifie
$$J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)}) \text{ si } h\rho(A) < 2 \ .$$
2. Montrer que la méthode du gradient à pas constant peut être identifiée à une méthode itérative (pour la résolution de systèmes linéaires) avec une matrice d'itération $C_h = (I - hA)$. En déduire la méthode du gradient à pas constant converge si $h\rho(A) < 2$. Identifier cette limite.
3. On note $\rho(C_h)$ le rayon spectral de la matrice d'itération $C_h = (I - hA)$. Étudier la fonction $h \mapsto \varphi(h) = \rho(C_h)$. Existe t'il une valeur de h pour lequel la convergence de la méthode est optimale ? Si oui calculer $\rho(C_h)$? Conclure.

Exercice 3 (Méthode du gradient à pas optimal)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sdp et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la méthode du gradient à pas optimal avec $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ pour la résolution du système linéaire $Ax = b$.

1. Montrer que les itérations $x^{(k)}$ donnée par la méthode du gradient à pas optimal h_k vérifie
$$J(x^{(k+1)}) < J(x^{(k)}) \ .$$
En déduire que la méthode du gradient à pas optimal converge.

2. Si on note $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ le résidu et $e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x$ l'erreur à l'itération k. Montrer que le choix du pas optimal $h_k = \frac{\left\|r^{(k)}\right\|_2^2}{\left\|r^{(k)}\right\|_A^2}$ minimise $\left\|e^{(k+1)}\right\|_A$.

Exercice 4 (Méthode du gradient conjugué)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sdp et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la méthode du gradient conjugué avec $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ pour la résolution du système linéaire $Ax = b$.

1. Soient une famille de vecteurs $(d(i))_{1\leqslant n}$ A-conjugué. Montrer que la famille $(d^{(i)})_{1\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose $n = 3$ et l'algorithme suivant : soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, on calcule pour tout k, $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k d^{(k)}$ où h_k minimise la fonction $g(h) = J(x^{(k)} + hd^{(k)})$.
   (a) Calculer h_k pour tout k.
   (b) On suppose que la famille $(d^{(i)})_{1\leqslant 3}$ est A-conjugué. Montrer que la méthode converge en seulement (au plus) 3 itérations.
3. Montrer que dans l'algorithme de la méthode du gradient conjugué, les directions de descente $d^{(k)}$ sont A-conjugué. En déduire que cet algorithme converge en au plus n itérations.
4. Comparer le cout de calcul de la méthode du gradient conjugué avec celle de la méthode de Cholesky dans le cas d'un système plein et creux. Conclusions : méthodes itératives ou directes ?