Université de Toulon
SeaTech 2016-2017

Formules de Taylor

Le mathématicien Brook Taylor a établit en 1712 la fameuse formule de *Taylor* qui permet d'approcher localement (i.e. au voisinage d'un point), une fonction suffisamment dérivable par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Ces formules permettent ainsi de comprendre et d'étudier (limites, calcul intégral, établir des équivalents, calculer des erreurs, approcher des opérateurs différentiels, ...) le comportement d'une fonction (qui est *a priori* assez complexe) par des simples polynômes. L'idée est vraiment très simple et intuitivement si vous zoomer au voisinage d'un point de cette fonction, "ca ressemble à un polynôme".

Dans la suite de votre première année, vous allez être souvent confronté à l'application des formules de Taylor notamment dans le cours de Calcul matriciel numérique et Calcul scientifique.

Notations : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $I = [a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^p avec $p \geqslant 1$. On note $x_0 \in I$ le point évoqué ci-dessus.

1 Formule de Taylor-Young

Cette première formule traduit de manière assez grossière l'approximation "zoom" évoquée ci-dessus. Il s'agit du théorème de Taylor-Young (ou simplement Taylor) :

Théorème 1.1 (Taylor-Young)**.** *Soit $f \in C^p(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + h^p \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Remarque 1.1.

— La somme $f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$ est le *polynôme de Taylor* ou encore *l'équivalent de f au voisinage de x_0*.

— On dit "grossière" à cause de la forme du reste $h^p\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ est une fonction non précisée. On note aussi ce terme $h^p\varepsilon(h) = o(h^p)$ qu'on lit "petit o". De la même manière on peut aussi écrire la formule sous la forme suivante

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^p}{(p)!} f^{(p)}(x_0) + O(h^{p+1})$$

où le reste est exprimé sous la forme d'un "grand O". Ces notations sont celles de Landau et elles désignes respectivement

$r(h) = o(s(h))$ si pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $|r(h)| \leqslant \varepsilon\,|s(h)|$ (on dit que r est négligeable asymptotiquement devant s).

et

$r(h) = O(s(h))$ si il existe $k > 0$ tel que $|r(h)| \leqslant k\,|s(h)|$ (on dit que r est asymptotiquement borné par s).

Enfin, pour terminer, notons que cette formule n'a qu'un caractère local. Elle donne une condition suffisante pour qu'une fonction f admette un développement limité à l'ordre p en un point x_0.

Exemple 1.

— *Elle est utilisé par exemple pour calculer une limite. Calculer* $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = ?$ *On pose* $x = 1/n$ *et on écrit* $(1+x)^{(1/x)} = \exp(\ln(1+x)/x)$. *Un équivalent en* 0 *de* $\ln(1+x)$ *est* x. *Ainsi un équivalent de* $\exp(\ln(1+x)/x)$ *au voisinage de* 0 *est* $\exp(1)$. *Dès lors, on en déduit que* $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$.

— *On peut aussi utiliser cette formule pour définir des approximations de fonctions dérivée. Par exemple, on peut approcher* $f'(x)$ *par* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *à l'ordre 1 ou bien par* $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, $h > 0$ *à l'ordre 2. Ici l'ordre se réfère à la puissance qui intervient dans le reste lorsqu'on utilise la notation avec le grand O. Plus précisément, pour la seconde approximation par exemple, on a* $f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$. *Plus l'ordre est élevé et meilleure est l'approximation.*

2 Formule de Taylor-Lagrange

C'est au successeur de Taylor qu'on doit la maîtrise du terme de reste notamment par le théorème de Taylor-Lagrange :

Théorème 2.1 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit* $f \in C^{p+1}(I,\mathbb{R})$ *et* $x_0 \in I$. *Alors pour tout* $h \in \mathbb{R}$ *tel que* $x_0 + h \in I$, *il existe* $\theta \in (0,1)$, *tel que*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x_0+\theta h) \ .$$

Lorsque le reste est exprimé sous la forme ci-dessus, on dit que cette formule est une généralisation du théorème des accroissements finis dont l'énoncé est

Théorème 2.2 (TAF)**.** *Soit* $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ *et* $x_0 \in [a,b]$. *Alors pour tout* $h \in \mathbb{R}$ *tel que* $x_0 + h \in [a,b]$, *il existe* $\theta \in (0,1)$, *tel que*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h)$$

ou encore

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \text{avec } x_0 = a, h = b-a \text{ et } c = x_0+\theta h \ .$$

Cette formule contrairement à la précédente est "moins locale" au sens où on peut en déduire des propriétés de la fonction au voisinage de x_0 par le polynôme de Taylor.

Exemple 2. *Par exemple,*

— *supposons* $f \in C^2(I,\mathbb{R})$, *alors on peut écrire*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0+\theta h) \ .$$

Donc si $f" > 0$ *(*f *convexe) alors on peut en déduire que le polynôme de Taylor (i.e. la tangente) est en dessous de* f.

— *considérons la fonction* $f(x) = \sin(x)$. *Alors* f *admet un développement de Taylor en* $x_0 = 0$ *à tout ordre et en particulier, à l'ordre* $p = 3$, *on a*

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(\theta h) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\theta h)$$

i.e ;

$$\sin(h) = f(h) = h - \frac{h^3}{3!}\cos(\theta h)\ .$$

On peut donc en déduire que pour $h > 0$, on a toujours $\sin(h) \leqslant h$ *(c'est la propriété que nous utilisons machinalement en TD).*

Remarque 2.1. C'est pourquoi il est difficile d'établir ce type de propriété avec la formule deTaylor-Young.

3 Formule de Taylor avec reste intégral

On peut également exprimer ce reste sous une forme plus générale, c'est le théorème avec reste intégral

Théorème 3.1 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f \in C^{p+1}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$,on a*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x_0 + th)\ dt\ .$$

Il suffit de remarquer que — d'après le théorème fondamental de l'analyse —

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t)\ dt = f(x_0) + \int_0^1 f'(x_0 + th)\ dt$$

et de procéder à une récurrence pour établir ce résultat.

4 Liens entre ces différentes formules

La formule avec reste intégral est une formulation générale car elle permet d'obtenir les formules de Taylor-Young et

- Si $f \in C^{p+1}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$ alors on déduit de la formule avec reste intégral la formule de Taylor-Young en posant

  $$\varepsilon(h) = \frac{h}{(p+1)!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x_0 + th)\ dt$$

  en montrant que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. En effet, la fonction

  $$h \to \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x_0 + th)\ dt$$

  est bornée au voisinage de 0.
- De la même manière, on peut déduire de la formule avec reste intégral, la formule de Taylor-Lagrange en utilisant le théorème de la moyenne généralisé (= TAFG) avec $F(t) = f^{(p+1)}(x_0 + th)$ et $G(t) = (1-t)^p$ dont l'énoncé est

  Théorème 4.1. *Soient $F \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $G \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{\pm})$ (de signe constant). Alors, il existe $c \in (a, b)$ tel que*

  $$F(c) \int_a^b G(x)\ dx = \int_a^b F(x) G(x)\ dx.$$

  C'est bien le théorème de la moyenne ou TAF généralisé en choisissant $G = \mathbb{1}_{[a,b]}$ et $F = f'$.