Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Calcul matriciel Numérique
Travaux Dirigés II-III

Partie I : factorisation LU

Exercice 1 (Matrices tridiagonales)**.**

1. En utilisant la factorisation LU d'une matrice tridiagonale $A \in M_n(\mathbb{R})$, écrire un algorithme[1] pour résoudre le système linéaire $Ax = f$ où $f \in \mathbb{R}^n$. Pour fixer les notations, on note $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et $c = (c_2, \ldots, c_n)$ la sous-diagonale, la diagonale et la sur-diagonale de A. On note $l = (l_1, \ldots, l_{n-1})$ la sous-diagonale de la matrice triangulaire inférieure $L \in M_n(\mathbb{R})$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$ et $u = (u_2, \ldots, u_n)$ la diagonale et la sur-diagonale de la matrice triangulaire supérieure $U \in M_n(\mathbb{R})$.
2. On considère une poutre de longueur L, étirée selon son axe, soumise à une force transversale $f(x)\,dx$ par unité de longueur dx et fixée à ses extrémités. Le déplacement $u(x)$ du point d'abscisse x est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \\ u(L) = 0. \end{cases}$$

La fonction $c(x)$ est une fonction positive définie à partir des caractéristiques de la poutre.
Écrire le système discret équivalent.

Exercice 2.
Montrer les propriétés suivantes :

1. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).
2. L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) inversible est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).
3. Calculer l'inverse de la matrice A_k suivante

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & a_{k+1,k} & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & a_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer $\Pi_{k=1}^{n} A_k$.

1. C'est l'algorithme de Thomas

Exercice 3.
On considère les deux systèmes linéaires suivants :

$$A_1\mathbf{x} = \mathbf{b_1} \qquad \text{où} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

et

$$A_2\mathbf{x} = \mathbf{b_2} \qquad \text{où} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A_1.
2. Calculer le déterminant de la matrice A_1 en utilisant sa factorisation LU.
3. Résoudre le système linéaire $A_1x = b_1$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.
4. Vérifier que l'algorithme de factorisation LU (avec pivot) pour la matrice A_2 ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.
5. Trouver une matrice P de permutation de façon à ce que la matrice PA_2 soit factorisable, puis calculer la factorisation LU de PA_2.
6. Calculer le déterminant de la matrice A_2 en utilisant sa factorisation LU.
7. Résoudre le système linéaire $A_2x = b_2$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.

Partie II : factorisation de Cholesky

Exercice 4.

On considère la matrice A de taille $n \times n$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad |i-j| < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que cette matrice est définie positive.
2. Écrire l'algorithme de Cholesky pour une matrice A symétrique définie positive quelconque de taille $n \times n$.
3. Déterminer le coût total de cet algorithme.
4. En utilisant la propriété de structure bande de la matrice A, proposer une nouvelle version de l'algorithme de Cholesky pour la matrice A qui permette de réduire le nombre d'opérations effectuées.
5. Déterminer le coût total de cet algorithme. Comparer ce coût à celui de la factorisation LU de l'exercice 1-1.