Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Calcul Matriciel Numérique
Travaux Pratiques II

Dans ce TP, on s'intérèsse à la mise en oeuvre de la factorisation LU et de Cholesky pour la résolution de systèmes linéaires.

Partie I : Factorisation LU

Exercice 1 (Principe de validation)**.**

1. Construire une matrice triangulaire inférieure $L \in M_3(\mathbb{R})$ à diagonale unité avec $L_{31} = 0$.
2. Construire une matrice triangulaire supérieure $U \in M_3(\mathbb{R})$ avec $U_{13} = 0$.
3. Définir $A = LU$.
4. Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $b = Ax$.
5. A l'aide d'octave, calculer la solution du système $Ly = b$.
6. A l'aide d'octave, calculer la solution du système $Ux = y$.
7. Vérifier que la solution est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Matrices tridiagonales)**.**
Mise en oeuvre de l'algorithme de Thomas :

1. Implémenter un algorithme permettant de résoudre un système linéaire $Ax = f$ où A est une matrice tridiagonale, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $f \in \mathbb{R}^n$.
   Indications : La résolution du système est réalisée en deux temps :
   — étape de "descente" : résolution de $Ly = f$,
   — étape de "montée" : résolution de $Ux = f$ [1]
2. Validez votre algorithme avec l'exemple de l'exercice 1.
3. **Applications** : On considère une poutre de longueur $L := 1$, étirée selon son axe, soumise à une force transversale $f(x)\,dx$ par unité de longueur dx et fixée à ses extrémités. Le déplacement $u(x)$ du point d'abscisse x est solution du problème aux limites :

$$(P) \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, \\ u(L) = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que ce problème peut être approché par un système linéaire sous la forme

$$A_h U_h = F_h \tag{1}$$

1. Vous trouverez à l'adresse `http://ersoy.univ-tln.fr/documents/teaching/TP2_3_CMath.zip` des extraits de codes à compléter.

où A_h est la matrice tridiagonale suivante :

$$A_h = \begin{pmatrix} 2+h^2c(x_1) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2c(x_2) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2c(x_3) & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2+h^2c(x_N) \end{pmatrix} \tag{2}$$

où $h = \frac{1}{N+1}$ est le pas de subdivision de noeuds $x_i = ih$. Le second membre F_h correspond au vecteur $F_h = (f(x_i))_{i=1,\dots,N}$.

(b) Soit $c(x) = x(1-x)$ et $u(x) = c(x)\exp(x)$. Définir f tel que u soit l'unique solution de (P).

(c) Résoudre le problème (1) pour $N = 10, 50, 100, 1000, 10000, 100000$ [2]. Dresser un tableau sous la forme,

N	$E(N)$	$T(N)$

où $E(N)$ est la norme l_2 de l'erreur et $T(N)$ le temps (totale comprenant la factorisation et la résolution) de calcul.

(d) Tracer sur une même fenetre graphique les solutions approchées et la solution exacte. Faire de même pour le temps de calcul en fonction de N

(e) Conclusions ?

Partie II : Factorisation de Cholesky

Exercice 3 (Méthode de Cholesky pour une matrice à bande)**.**
On rappelle que la méthode de Cholesky, donne, lorsque A est symétrique définie positive, la décomposition suivante :

$$A = BB^t$$

où B est une matrice triangulaire inférieure.

1. Proposer un algorithme pour calculer la matrice B lorsque la matrice A est tridiagonale.
2. Implémenter une fonction Cholesky(A) qui à partir d'une matrice définie positive renvoie la matrice B.
3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive, puis valider votre algorithme.
4. Implémenter une fonction SolveCholesky(A,b) qui résout le système linéaire $Ax = b$.
5. En considérant $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, construire $b = Ax$ puis valider votre fonction SolveCholesky(A,b).
6. **Applications** : On considère le problème (P) de l'exercice 2-3.
   — Montrer que A_h donné par (2) est symétrique définie positive.
   — Reprendre les questions de l'exercice 2-3(c), 2-3(d) et 2-3(e).
   — Comparer vos résultats avec ceux obtenus à l'exercice 2.

2. Utiliser le programme main.m disponible à l'adresse `http://ersoy.univ-tln.fr/documents/teaching/TP2_3_CMath.zip`