Université de Toulon
SeaTech-1$^{\text{ère}}$ année

Analyse Numérique
Travaux Pratiques I

Résolution itérative des équations non linéaires.

Le but de ce TP est de tester diverses méthodes numériques pour résoudre $f(x) = 0$ à l'aide du language FORTRAN 77.

Note : vous trouverez à l'adresse `http://ersoy.univ-tln.fr/documents/teaching/TP1_ANA.zip` tous les documents nécessaires à la réalisation de ce TP. Il s'agit d'un programme "prog.f" et d'un manuel FORTRAN 77.

Exercice 1.
On considère la fonction $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Vérifier d'abord graphiquement que $f(x) = 0$ admet une unique racine $\xi \in [0, 1]$. Donnez un encadrement de ξ à 10^{-1} près.
   Indications : définir un maillage de 100 points.
2. Méthode du point fixe.
   (a) On pose $\phi(x) = e^{-x},\ x_0 = \frac{1}{2}$.
   Calculer $x_n = \phi(x_{n-1})$ pour $n = 1, \ldots, 8$.
   (b) On pose $\phi(x) = x - \frac{2}{3+e^{-1}}(x - e^{-x}),\ x_0 = \frac{1}{2}$.
   Calculer $x_n = \phi(x_{n-1})$ pour $n = 1, \ldots, 8$.
   (c) On pose $\phi(x) = -\ln(x),\ x_0 = \frac{1}{2}$.
   Calculer $x_n = \phi(x_{n-1})$ pour $n = 1, \ldots, 8$.
   (d) Comparer les trois valeurs obtenues pour x_8. Que se passe t-il pour la méthode (c).

Exercice 2.
On considère la fonction $f(x) = x - e^{-x}$ et la méthode du point fixe $\phi(x) = e^{-x},\ x_0 = \frac{1}{2}$.

1. Calculer l à $\varepsilon = 10^{-6}$ près avec l'algorithme du point fixe.
2. Calculer l à $\varepsilon = 10^{-6}$ près avec l'algorithme de Newton.
3. Calculer l à $\varepsilon = 10^{-6}$ près avec l'algorithme de la sécante (attention cette méthode nécessite deux valeurs d'initialisation, par exemple, $x_0 = 0.5$ et $x_1 = 0.6$).
4. Calculer l à $\varepsilon = 10^{-15}$ près avec l'algorithme de Newton. On considère dans la suite ce résultat comme une solution de référence.
5. On désire étudier l'ordre de convergence de la méthode, c'est-à-dire déterminer d tel que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1} - l|}{|x_n - l|^d} = \lambda \in]0, +\infty[.$$
   On remarque que pour n suffisamment grand (sous hypothèse de convergence), on a :
   $$\ln(|x_{n+1} - l|) \approx \log(\lambda) + d\ln(|x_n - l|)$$
   Calculer
   $$\frac{\ln(|x_{n+1} - l|)}{\ln(|x_n - l|)}$$
   pour différentes valeurs de n. En déduire une approximation de d.