Université de Toulon
SeaTech - 1ère année

Analyse Numérique
Travaux Dirigés I

Résolution des équations non linéaires.

Exercice 1.

1. Montrer que la fonction $f(x) = x^3 - x - 1$ admet une racine réelle dans l'intervalle $[1, 2]$.
2. Étudier la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $x_0 \in [1, 2]$ avec
   (a) $\varphi(x) = x^3 - 1$.
   (b) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.
   (c) $\varphi(x) = (x + 1)^{1/3}$.
3. Écrire l'algorithme du point fixe avec un test d'arrêt.

Exercice 2.
On considère l'équation $x = \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = 0.9 \ln(x + 1) + 0.2$ dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que la suite associée est convergente.

Exercice 3.
On considère la fonction $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ dans $[1, 2]$.

1. Montrer qu'il existe une unique racine réelle.
2. Reformuler le problème sous la forme $x = \varphi(x)$ et étudier la convergence de la méthode itérative associée.

Exercice 4.
On considère la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$ (formule de Héron) et $x_0 \geqslant \sqrt{A}$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_n$ vérifie $x_n \geq \sqrt{A}$, $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite est décroissante. En déduire qu'elle converge vers $\sqrt{A}$.
3. En apliquant la méthode de Newton-Raphson à la fonction $f(x) = x^2 - A$, retrouvez la formule de Héron. Étudier l'ordre de convergence de la méthode.

Exercice 5.
1. Montrer que l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution unique, que l'on notera ξ, dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = \dfrac{1}{2}, \qquad x_{n+1} = e^{-x_n}.$
   Cette suite converge-t-elle vers ξ? Quel est le type de la méthode décrite? Étudier l'ordre de convergence de la méthode.

3. Soit $\alpha \in I\!\!R$ et g_α la fonction définie par
$$g_\alpha(x) = x - \alpha(x - e^{-x})\,.$$
Pour quelles valeurs de α la fonction g_α est-elle contractante pour tout $x \in [0,1]$?

4. Montrer que pour $\alpha \in [0,1]$ on a
$$\forall x \in [0,1], g_\alpha(x) \in [0,1]\,.$$

5. On pose $\alpha = \dfrac{2}{3+e^{-1}}$. La fonction g_α est-elle contractante sur $[0,1]$? Montrer que la suite (x_n) définie par
$$x_0 = \frac{1}{2}\,, \qquad x_{n+1} = g_\alpha(x_n)$$
converge vers ξ.

6. Analyser l'erreur en fonction de $\min\limits_{\alpha\in(0,1)} L_\alpha = \min\limits_{\alpha\in(0,1)} \sup\limits_{x\in[0,1]} |g'_\alpha(x)|$. Conclusion(s)?

Exercice 6.
On se propose de résoudre dans $I\!\!R^+$ l'équation $x = -\ln x$ avec la précision $\varepsilon = 10^{-9}$.

1. Montrer que cette équation admet une solution unique $l \in]0,1[$.
2. Vérifier que la méthode itérative $x_{n+1} = -\ln x_n$ diverge.
3. Montrer que la solution l peut être obtenue par application de l'algorithme $x_{n+1} = e^{-x_n}$.
4. Appliquer la méthode de Newton. Que peut-on conclure quant à la rapidité de convergence des deux algorithmes? Appliquer la méthode de la sécante.

Exercice 7 (Examen 2011-2012)**.**
On propose la méthode numérique $x_{n+1} = x_n + \alpha(x_n^2 - 2)$ avec $x_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On note $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x^2 - 2)$.
   (a) Calculer $\varphi'_\alpha(x)$.
   (b) Montrer que la méthode ne peut converger que si $\alpha < 0$.
2. Soit $x_0 \in [1,2]$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) converge si $\alpha > -\dfrac{1}{2}$.
   (b) Donner sa limite. Soit l cette limite.
3. En calculant $\varphi'_\alpha(l)$, trouver la valeur de α qui assure la convergence la plus rapide.