Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Analyse Numérique
Travaux Dirigés II

Interpolation polynômiale.

Exercice 1.
Soit P un polynôme de degré 3 tel que :

$$P(-1) = -6,\ P(0) = 1,\ P(1) = 2, P(2) = -3.$$

Calculer $P(3)$.

Exercice 2.
Donner l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = 3^x$ basé sur les points $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. En déduire une approximation de $\sqrt{3}$. Quelle est l'erreur maximale commise ?

Exercice 3.
On se donne la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), \qquad x \in I = [0, 1].$$

1. Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ équidistribués. Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f)$ sur l'intervalle I, en fonction du degré n du polynôme et étudier son comportement quand $n \to \infty$.
2. Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$. *(Sugg. : essayer pour $n = 1, 2, 3, \ldots$)*

Exercice 4.
On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad x \in I = [0, 1].$$

Déterminer le nombre minimal d'intervalles uniformes pour que le polynôme linéaire par morceaux qui interpole la fonction par intervalles donne une erreur $\leq 10^{-5}$.

Exercice 5.
Soit la fonction

$$K(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Donner le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ au voisinage de $x_0 = 0$ de la fonction $f(t) = e^{-t^2}$. On note $P_n(t)$ la partie principale de ce développement.
2. Majorer, en fonction de n et de x, l'erreur $|e_n(x)|$ où :

$$e_n(x) = K(x) - \int_0^x P_n(t) dt.$$

3. Calculer $K(0)$ et les valeurs $K(1/2)$, $K(1)$ à 10^{-3} prés.

4. Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 basé sur les points $0, 1/2, 1$. Evaluer $P_2(1/3)$ et le comparer à la valeur approchée de $K(1/3)$ à 10^{-3} prés.
5. Quels sont les inconvénients liés à l'approximation de fonctions sur un intervalle donné par leur développement de Taylor ?

Exercice 6.
On définit les polynômes de Tchebychev par

$$t_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

1. Montrer que t_n est un polynôme de degré n, dont le coefficient directeur est 2^{n-1} si $n \geq 1$.
2. Déterminer les racines de t_n (points de Tchebychev).
3. Trouver le changement de variable pour se ramener à un intervalle $[a, b]$ quelconque au lieu de $[-1, 1]$.
4. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation commise en utilisant les points de Tchebychev.

Exercice 7.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([-1, 1])$. On note $P_2(x)$ le PIL de f aux points :

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

1. Caractériser l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes $P(x)$ satisfaisant les conditions :

$$P(-1) = f(-1),\ P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P(1) = f(1).$$

   (Indications : Exprimer les conditions portant sur le polynôme $R(x) = P(x) - P_2(x)$; en déduire que $R(x) = x(x^2 - 1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme satisfaisant une condition que l'on identifiera ; enfin, caractériser tous les polynômes $Q(x)$ admissibles et conclure.)
2. Montrer qu'il existe un élément $P^*(x)$ et un seul de $\mathcal{P}$ dont le degré est au plus égal à 3.

$$\forall x \in [0, 1], \exists c \in]-1, 1[\text{ t.q. } f(x) = P^*(x) + x^2(x^2 - 1)\frac{f^{(4)}(c)}{4!}.$$

   (Indications : Il s'agit de démontrer que $f(x)$ a une certaine forme pour tout x fixé appartenant à $[-1, 1]$.
   (i) Examiner le cas où $x = -1, 0$ ou 1.
   (ii) Dans le cas général ($x \neq -1, 0$ et 1), poser :

$$\phi(t) = f(t) - P^*(t) - \lambda t^2(t^2 - 1)$$

   où λ est la constante pour laquelle $\phi(x) = 0$ (justifier son existence !). Faire le décompte des zéros distincts connus de $\phi(t)$ et de ses dérivées successives, en n'oubliant pas de calculer $\phi'(0)$!)