Université de Toulon
SeaTech - $1^{\text{ère}}$ année

Analyse Numérique - Travaux Dirigés IV

Équations différentielles

Exercice 1.
Pour quels types de second membre f la méthode d'Euler résout exactement le problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = \alpha \in \mathbb{R}$, $t \in (0, T] \subset \mathbb{R}$? Pourquoi ? Mêmes questions pour les méthodes de Heun, RK2 et RK4.

Exercice 2 (Restriction ...)**.**
Soient $\lambda > 0$ et $T > 0$ donnés. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t), t \in (0, T] \ , \\ x(0) = x_0 \ . \end{cases}$$

1. Donner la solution du problème de Cauchy.
2. Montrer que le schéma d'Euler peut s'écrire sous la forme $x_i = (1 - \lambda\delta t)^i x_0, \forall i \geq 0$ où δt est le pas de la subdivision régulière. Est ce que cette méthode converge ? Peux t-on appliquer le(s) théorème(s) du cours ? En pratique comment choisir δt si $T \gg 1$ et/ou si $\lambda \gg 1$?
3. Même question pour le schéma d'Euler implicite.
4. Conclusions ?

Exercice 3.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^p et k-lipschitzienne par rapport à la variable x. On considère la méthode de résolution suivante :

$$x_{n+1} = x_n + \delta t \Phi(t_n, x_n, \delta t)$$

avec

$$\Phi(t, x, d) = af(t, x) + bf(t + d/2, x + d/2f(t, x)) + cf(t + d, x + df(t, x))$$

où x_n est une approximation de la solution $x(t_n)$ de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$.

1. Pour quelles valeurs (a, b, c) retrouve t-on la méthode d'Euler ? RK2 ? RK4 ?
2. Pour quelles valeurs (a, b, c) la méthode est-elle stable ? Convergente ? Lorsque la méthode converge, déterminer la limite.
3. Pour quelles valeurs (a, b, c) la méthode est-elle d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 4 ? Peux-t-on augmenter l'ordre ?

Exercice 4.
On considère la méthode de résolution de Heun :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\delta t}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + \delta t f(t_n, x_n)), \ x_0 \text{ donné} \ .$$

1. Montrer que si f est continue et k-lipschitzienne par rapport à la variable x alors la méthode à un pas est convergente.
2. On souhaite calculer une approximation de l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$. Montrer que ce problème peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle.
3. Déterminer une approximation de l'intégrale et étudier l'erreur en fonction de δt. Quelle est l'ordre de la méthode ?