Université de Toulon
SeaTech - 1ère année

Analyse Numérique
Travaux Pratiques IV

Équations différentielles.

Le but de ce TP est de mettre en oeuvre quelques méthodes pour l'approximation des équations différentielles.
Note : vous trouverez à l'adresse `http://ersoy.univ-tln.fr/documents/teaching/TP4_ANA.zip` tous les documents nécessaires à la réalisation de ce TP. Pour compiler un programme `main.f` nécessitant des routines dans un fichier, par exemple `sub.f`, on utilise la commande suivante :
`gfortran main.f sub.f -o nom_code`.

Soit $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$ et soit $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et Lipschitz par rapport à x. On cherche à calculer une solution approchée $x_n \approx x(t_n)$ de l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

munie de la condition initiale

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

par une méthode numérique à un pas. En notant $e_n = x(t_{n+1}) - x_{n+1}$ l'erreur de consistance à l'itération n, on rappelle qu'une méthode à un pas est au moins d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si $f \in C^p$ et si il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|e_n| \leqslant C\delta t^{p+1},$$

où $\delta t = \dfrac{T - t_0}{N}$ est le pas de la subdivision régulière, $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.
On considère le problème de Cauchy avec $x'(t) = -2x(t)$, $x(0) = 1$, $t \in [0, 10]$.

1. Donner la solution exacte.
2. Appliquer la méthode d'Euler explicite pour $N = 5, 10, 15, 25, 100, 1000$. Conclusion(s) ?
3. Même question avec la méthode d'Euler implicite.

Exercice 2.
Programmer les méthodes d'Euler, Heun, RK2 et RK4 *explicite* au problème sur $[0, 1]$ avec le second membre $f(t, x) = e^t$ et la donnée initiale $x(0) = 1$.

1. Est ce que ces méthodes sont consistantes ? Justifiez.
2. Est ce que ces méthodes sont stables ? Justifiez.
3. Est ce que ces méthodes sont convergentes ? Justifiez.
4. Lorsque la méthode converge déterminer théoriquement et numériquement l'ordre de convergence à l'instant $t = 1$.
   Indications : voir TP 3 et choisir par exemple, $N = 10j$, $j = 1, \ldots, 10$.

Exercice 3 (Facultatif)**.**
Programmer les méthodes d'Euler *implicite* au problème sur $[0, 1]$ avec le second membre $f(t, x) = e^t\, x^2$ et la donnée initiale $x(0) = 0.5$.
Indications : voir TP 1.

1. Est ce que cette méthode est consistante ? Stable ? Convergente ? Justifiez.
2. Lorsque la méthode converge déterminer théoriquement et numériquement l'ordre de convergence à l'instant $t = 1$.
3. Conclusion(s) ?