Université de Toulon
SeaTech - 1ère année

Analyse Numérique - Travaux Dirigés V

Méthode des différences finies

Exercice 1 (L'équation de transport)**.**
On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant :

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t + cu_x = 0, x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sauf indication contraire, nous supposerons $c > 0$ et u_0 une donnée initiale de classe $C^1(\mathbb{R})$ à support compact.

1. Pourquoi appelle t'on cette équation "équation de transport"?

   (a) Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ fixé, la solution u du problème (1) est constante le long des courbes "caractéristiques" $X(\cdot;(x,t))$ (courbes paramétrées par (x,t)) définies par, $\forall 0 < s < t$,

   $$\begin{cases} \dfrac{dX(s;(x,t))}{ds} &= c \\ X(t;(x,t)) &= x. \end{cases} \quad \text{(méthode des caractéristiques)}$$

   (b) En déduire que la solution de cette équation est

   $$u(t,x) = u_0(x-ct)\ .$$

2. Études de schémas numériques : on s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation (1) par des schémas aux différences finies de pas de temps δt sur une grille spatiale régulière de pas δx. On note $\lambda = c\dfrac{\delta t}{\delta x}$. A cet effet, on considère les schémas numériques suivants, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geqslant 0$

   (S1) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} = 0$ (explicite décentré aval)

   (S2) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$ (explicite centré)

   (S3) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} = 0$ (explicite décentré amont)

   (S4) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$ (leap frog (saute mouton))

   Pour chaque schéma, étudier

   (a) la consistance et l'équation modifiée,

   (b) la stabilité L^2 et L^∞,

   (c) conclure.

3. Études du schéma numérique de Lax-Wendroff : on note U une solution régulière de l'équation (1).

   (a) Montrer que

   $$U(x_i, t_{n+1}) = U(x_i, t_n) - c\delta t U_x(x_i, t_n) + c^2 \frac{\delta t^2}{2} U_{xx}(x_i, t_n) + O(\delta t^3).$$

(b) En déduire le schéma numérique suivant

(S5) $u_i^{n+1} = u_i^n - \dfrac{\lambda}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \dfrac{\lambda^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$

(c) Étudier la consistance et la stabilité L^2 et L^∞ de ce schéma. Comparer le schéma **(S5)** avec le schéma **(S2)**. Quel est le rôle du terme $\dfrac{\lambda^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$?

Exercice 2 (Équation de la chaleur)**.**
Soit $\nu > 0$. On considère l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \nu u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, \, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Pourquoi dit on que la solution de l'équation de chaleur diffuse à vitesse "infinie"?

   (a) Soit u_0 une fonction à support compact. Montrer que la solution est donnée par

   $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t} \right) \, dy$$

   (b) Comparer les solutions des problèmes (1) (c.f. Exercice 1) et (2)?

2. Études de schémas numériques: on note dans la suite $D_i^n = u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n$ et $\lambda = \dfrac{\nu \delta t}{\delta x^2}$. On propose les schémas numériques suivants $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geqslant 0$

   (S6) $u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda D_i^n$
   (S7) $u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda D_i^n$
   (S8) $u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda D_i^{n+1}$
   (S9) $\theta \in [0,1]$, $u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda\big(\theta D_i^n + (1-\theta) D_i^{n+1}\big)$

   Pour chaque schéma, étudier

   (a) la consistance et l'équation modifiée,
   (b) la stabilité L^2 et L^∞,
   (c) conclure.

Exercice 3 (Équation d'advection-diffusion (TP))**.**
Soit $c > 0$ et $\nu > 0$. On considère l'équation d'advection-diffusion suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + c u_x - \nu u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, \, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Proposer un schéma de votre choix et l'étudier.