Université de Toulon
SeaTech - 1$^{\text{ère}}$ année

Analyse Numérique
Travaux Pratiques V

Le but de ce TP est de mettre en oeuvre des schémas numériques différences finies pour l'équation de transport.
Note : vous trouverez à l'adresse `http://ersoy.univ-tln.fr/documents/teaching/TP5_ANA.zip` tous les documents nécessaires à la réalisation de ce TP notamment un exemple de code en différences finies pour résoudre l'équation de transport. Dans le dossier "code", vous trouverez un fichier Makefile et un dossier source. Pour compiler et créer l'exécutable, ouvrir un terminal (au même niveau que le dossier source dans l'arborescence de sorte que la commande `ls` affiche le dossier "source" et le fichier Makefile) et lancer la commande `make`, puis `./transport`. Pour nettoyer le contenu, utiliser la commande `make clean` .

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des arguments sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant :

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + c(x,t)u_x = 0, x \in (0,10),\ t \in (0,5) \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{1}$$

munie de conditions aux limites périodiques. On considère les schémas numériques suivants :

(S1) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} = 0$ (explicite décentré aval)

(S2) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$ (explicite centré)

(S3) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + c\dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} = 0$ (explicite décentré amont)

(S4) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\delta x} = 0$ (leap frog (saute mouton))

(S5) $u_i^{n+1} = u_i^n - \dfrac{\lambda}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \dfrac{\lambda^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$

On note $\alpha \in (0,1]$ le réel tel que $\delta t = \alpha\dfrac{\delta x}{c}$.

1. On suppose $c = 1$ et la donnée initiale régulière $u_0(x) = \exp(-50(x-3)^2)$. Pour chaque schéma
   (a) Modifier le programme "code".
   (b) Pour les valeurs $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.9$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 1.2$, confronter la solution numérique avec la solution exacte $u(t,x) = u_0(x - ct)$ pour $N = 100$, puis $N = 500$ et enfin $N = 1000$. Commenter vos résultats numériques à l'instant final $T = 5$ en vous appuyant sur l'analyse théorique (erreur de troncature, stabilité, diffusion numérique, dispersion numérique, ...). Justifiez vos réponses.
2. Reprendre la question 1. avec la donnée initiale discontinue
$$u_0(x) = \exp(-50(x-3)^2) + \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right. .$$
3. Reprendre la question précédente avec $c < 0$. Comment peut-on modifier/combiner les schémas **(S1)** à **(S5)** pour résoudre numériquement l'équation de transport (1) quelque soit $c \in \mathbb{R}$. Même question lorsque c est une fonction continue par rapport à t et Lipschitz par rapport à x.