
Modélisation, analyse mathématique et numérique de divers écoulements compressibles ou incompressibles en couche mince

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 10 Septembre 2010

pour l'obtention du

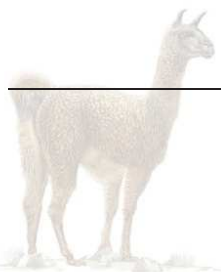
Doctorat de l'Université de Savoie
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

MEHMET ERSOY

Composition du jury

<i>Président :</i>	M. Francis FILBET	Professeur à l' Université Claude Bernard, Lyon I
<i>Rapporteurs :</i>	M. Franck BOYER M. Jean-Frédéric GERBEAU	Professeur à l'Université Paul Cézanne, Marseille Directeur de Recherche à l'INRIA Rocquencourt
<i>Examineurs :</i>	M. Fabien MARCHE M. Eleuterio TORO	Maître de Conférences à l'Université Montpellier II Professeur à l'Université de Trento, Italie
<i>Directeurs de thèse :</i>	M. Christian BOURDARIAS M. Stéphane GERBI	Professeur à l'Université de Savoie Maître de Conférences à l'Université de Savoie



REMERCIEMENTS

Ce manuscrit est la touche finale de trois années de travail effectué au Laboratoire de Mathématiques, LAMA. Ce fut un plaisir d'effectuer ma thèse dans de telles conditions. J'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'avancement de ces travaux.

En premier lieu, je souhaite donc remercier de vive écriture mes directeurs de thèse Christian Bourdarias et Stéphane Gerbi, qui m'ont laissé libre choix de mes axes de recherche qui ont sans cesse évolué pour aboutir à cette dissertation. De par leur disponibilité, leur aide précieuse, leurs humour et leur confiance, ils m'ont apporté un cadre de travail agréable. MERCI Christian et Stéphane !

Je voudrais ensuite remercier M. Jean-Frédéric Gerbeau et M. Franck Boyer d'avoir rapporté cette thèse, pour avoir suivi mes travaux de près et avec intérêt, qui m'ont donné un avis critique et constructif pour améliorer le manuscrit.

J'exprime toute ma reconnaissance la plus sincère à M. Francis Filbet, M. Fabien Marche et M. Eleuterio Toro d'avoir participé au jury en tant qu'examineur.

Je souhaiterais également remercier Didier Bresch de nous avoir, Timack Ngom et moi, orienté vers les équations primitives compressibles, une partie de cette thèse qui fut un début, pour moi, pour l'étude mathématique d'équations aux dérivées partielles.

Sans oublier Mathieu, Julien, Timack, Dahi et les autres doctorants du LAMA ... et les chefs de l'étage ... Merci !

Merci Nadine et Merci Claudia pour les nombreuses corrections ...

Enfin, je souhaite remercier ma femme Gül pour l'appui quotidien dont elle a fait preuve et toute la famille qui ont, depuis toujours, été un soutien très précieux. Pour terminer, je souhaite remercier mon petit Kaan qui a pointé le bout de son nez en toute fin de rédaction de ce manuscrit.

*Je dédie cette thèse à ma femme, GÜL, pour sa patience,
à toute la famille ERSOY...
ET surtout à mon fils KAAN*

*Patience et longueur de temps - Font plus que force ni que rage.
Jean de La Fontaine*

Modélisation, analyse mathématique et numérique de divers écoulements compressibles ou incompressibles en couche mince

Résumé

Dans la première partie, on dérive formellement les équations **PFS** (**P**ressurised and **F**ree **S**urface) pour les écoulements mixtes en conduite fermée avec variation de géométrie. On écrit l'approximation de ces équations à l'aide d'un solveur VFRoe et d'un solveur cinétique en décentrant les termes sources aux interfaces. En particulier, on propose le décentrement d'un terme de friction, donnée par la loi de Manning-Strickler, en introduisant la notion de *pente dynamique*. Enfin, on construit un schéma bien équilibré préservant les états stationnaires au repos en définissant une matrice à profil stationnaire conçue pour le schéma VFRoe. Suivant cette idée, on construit, en toute généralité, un schéma bien équilibré préservant tous les états stationnaires.

Pour traiter les points de transitions (i.e. le changement de type d'écoulement surface libre vers charge et vice et versa), on étend la méthode des « ondes fantômes » dans ce contexte et on propose un traitement complètement cinétique.

Dans la deuxième partie, on étudie des équations primitives compressibles simplifiées dans le cadre de la modélisation de la dynamique de l'atmosphère. En particulier, on obtient un résultat d'existence de solutions faibles globales en temps en dimension 2 d'espace. On établit également un résultat de stabilité de solutions faibles pour le modèle en dimension 3 d'espace. À cet égard, on introduit un changement de variables convenable qui permet de transformer les équations initiales en un modèle plus simple à étudier.

Dans la troisième et dernière partie, on présente une courte introduction à la cavitation. En particulier, on rappelle les différents types de cavitation et les modèles mathématiques de Rayleigh-Plesset pour l'étude d'une bulle isolée et un modèle de mélange plus complexe. En vue de modéliser la cavitation dans les conduites fermées, on introduit un modèle à deux couches pour prendre en compte, dans un premier temps, l'effet d'une poche d'air comprimée par la surface libre et les bords de la conduite. En particulier, le système obtenu, à 4 équations, est généralement non hyperbolique et ses valeurs propres ne sont pas calculables explicitement. On propose alors une approximation numérique basée sur un schéma cinétique mono-couche.

Dans le dernier chapitre, on dérive formellement un modèle de transport de sédiments basé sur l'équation de Vlasov couplée à des équations de Navier-Stokes compressibles avec un tenseur de viscosité anisotrope. Ce modèle est ensuite obtenu par le biais de deux analyses asymptotiques.

Mots-clés: Écoulement mixte en conduite fermée, Équations à surface libre, Équations en charge, Volumes Finis, Solveur VFRoe, Solveur cinétique, Schéma bien équilibré, Équations primitives compressibles, Existence et stabilité de solutions faibles, Équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes, Cavitation, Modèle bi-couche, Équations de Saint-Venant-Exner.

Modeling, mathematical and numerical analysis of various compressible or incompressible flows in thin layer

Abstract

In the first part, we formally derive the **PFS** (**P**ressurised and **F**ree **S**urface) equations for unsteady mixed flows in closed water pipes with variable geometry. We write the numerical approximation of these equations by a VFRoe and a kinetic solver by upwinding the sources terms at the cell interfaces. Particularly, we propose the upwinding of a friction term (given by the Manning-Strickler law) by introducing the notion of *dynamic slope*. Finally, we construct a well-balanced scheme preserving the still water steady states by defining a stationary matrix especially constructed for the VFRoe scheme. Following this idea, we construct a well-balanced scheme which preserve all steady states.

To deal with transition points occurring when the state of the flow changes (i.e. free surface to pressurised and conversely), we extend the « ghost waves » method and propose a full kinetic approach.

In the second part, we study a simplified version of a compressible primitive equations for the dynamic of the atmosphere. We obtain an existence result for weak solutions global in time for the two-dimensional model. We also state a stability result for weak solutions for the three dimensional version. To this end, we introduce a useful change of variables which transform the initial model in a more simpler one.

We present a small introduction to the cavitation phenomena. We recall the different kinds of cavitation and some mathematical models such as the Rayleigh-Plesset equation and a mixed model. As a first step toward the modeling of the cavitation in closed pipes, we propose a bilayer model which take into account the compressibility effect of the air onto the free surface. As pointed out by several authors, such a system, of 4 equations, is non hyperbolic and generally, eigenvalues cannot be explicitly computed. We propose a numerical approximation by using a kinetic scheme.

In the last chapter, we formally derive a sediments transport model based on the Vlasov equation coupled to an anisotropic compressible Navier-Stokes equations. This model is obtained by performing two asymptotic analysis.

Keywords: Unsteady mixed flows in closed water pipes, Shallow water equations (Saint-Venant), Pressurised equations, Finite Volume, VFRoe solver, Kinetic solver, Well-balanced scheme, Compressible primitive equations, Existence and stability results, Anisotropic compressible Navier-Stokes equations, Cavitation, Bilayer model, Saint-Venant-Exner equations.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

xi

PARTIE I Modélisation des équations en conduite fermée

CHAPITRE 1 Les équations PFS

1.1	Introduction	5
1.1.1	Autour des équations de Saint-Venant	5
1.1.2	Autour des écoulements mixtes	6
1.2	Dérivation formelle des équations à surface libre	9
1.2.1	Équations d'Euler incompressibles en coordonnées curvilignes	13
1.2.2	Le modèle à surface libre	16
1.3	Dérivation formelle des équations en charge	24
1.3.1	Équations d'Euler compressibles en coordonnées curviligne	25
1.3.2	Le modèle en charge	26
1.4	Les équations PFS	30
1.5	Conclusion et perspectives	35

CHAPITRE 2 Approximation des équations PFS par Volumes Finis

2.1	Introduction	39
2.1.1	Systèmes hyperboliques homogènes	40
2.1.2	Systèmes hyperboliques avec termes sources	45
2.2	Approximation du flux numérique par une méthode VFRoe	47
2.2.1	Principe du schéma	48
2.2.2	Le problème de Riemann linéarisé sans point de transition	49
2.2.3	Le problème de Riemann linéarisé avec point de transition : approche « onde fantôme »	52
2.2.4	Condition CFL et suivi de l'état d'une maille	56
2.2.5	Traitement des conditions aux limites	59
2.2.6	Construction d'un schéma préservant les états stationnaires à vitesse nulle	64
2.2.7	Quelques simulations numériques en écoulement mixte et dépression	76
2.2.8	Remarques générales concernant l'approximation numérique par le solveur VFRoe	82
2.3	Approximation du flux numérique par une méthode cinétique	83
2.3.1	Principe du solveur cinétique	83
2.3.2	Solveur cinétique dans le cadre d'un écoulement sans point de transition	90
2.3.3	Traitement des points de transitions : approche FKA	99
2.3.4	Traitement des conditions aux limites	102
2.3.5	Construction d'un schéma bien équilibré	104
2.3.6	Quelques simulations numériques	105
2.3.7	Remarques générales concernant l'approximation numérique par le solveur cinétique	129

PARTIE II Autour des Équations Primitives Compressibles

CHAPITRE 3 Existence et stabilités de solutions faibles	133
3.1 Introduction	134
3.1.1 Contexte physique.	135
3.1.2 Contexte mathématique.	136
3.2 Dérivation formelle des EPCs	138
3.2.1 Équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes	139
3.2.2 Analyse asymptotique formelle et les EPCs	140
3.3 Un résultat d'existence de solutions faibles pour les EPCs en dimension deux	142
3.3.1 Preuve du résultat d'existence	143
3.3.2 Preuve du résultat d'existence de B. V. Gatapov et A. V. Kazhikhov	145
3.4 Un résultat de stabilité de solutions faibles pour les EPCs en dimension trois	150
3.4.1 Étude de la stabilité de solutions faibles du modèle intermédiaire	152
3.4.2 Étude de la stabilité de solutions faibles pour les EPCs	161
3.5 Perspectives	161

PARTIE III Travaux en cours et perspectives

CHAPITRE 4 Vers la cavitation	
4.1 La cavitation	166
4.1.1 Historiquement	166
4.1.2 Apparition et les différentes formes de cavitation	167
4.1.3 Modélisation mathématique de la cavitation	169
4.1.4 Perspectives	173
4.2 Entrainement d'air dans une conduite fermée : approche bi-couche	174
4.2.1 Un modèle bicouche air/eau	175
4.2.2 La formulation cinétique	181
4.2.3 Le schéma cinétique	182
4.2.4 Tests numériques	183
4.2.5 Perspectives	191

CHAPITRE 5 Modélisation de la sédimentation	
5.1 Introduction	194
5.1.1 Les différents modes de transports de sédiments	194
5.1.2 Un modèle mathématique : les équations de Saint-Venant-Exner	195
5.2 Dérivation formelle du modèle de mélange	197
5.2.1 Présentation des modèles	197
5.2.2 Conditions aux limites	199
5.2.3 Analyse dimensionnelle du modèle de base	202
5.2.4 Analyse asymptotique formelle	203
5.3 Dérivation formelle d'un modèle de transport de sédiments	205
5.3.1 Analyse asymptotique de type couche mince	205
5.3.2 Régime asymptotique	209
5.3.3 Intégration verticale du modèle de mélange	211
5.4 Un premier exemple : le flux de transport diffusif de J-D. Zabsonré	212
5.5 Un deuxième exemple : le flux de transport de Grass	215
5.6 Perspectives	215

Annexes	217
----------------	------------

Annexe A Produits non-conservatifs	217
---	------------

Annexe B La méthode des tuyaux équivalents	219
---	------------

Annexe C Lemme d'Aubin-Simon et injections de Sobolev	221
--	------------

BIBLIOGRAPHIE

223

INDEX

231

AVANT-PROPOS

Au cours de cette thèse, je me suis intéressé de manière générale à la modélisation mathématique, à l'analyse théorique et à l'approximation numérique d'équations issues de phénomènes physiques complexes de type « couche mince ».

Mon travail s'articule autour des centres d'intérêts suivants :

- Écoulements d'eau instationnaires mixtes (en charge et à surface libre) dans des conduites fermées,
- Modélisation de la dynamique de l'atmosphère,
- Modélisation de la cavitation,
- Modélisation de la sédimentation.

Ce manuscrit est divisé en trois parties et cinq chapitres qui correspondent à des développements d'articles publiés, soumis ou en cours de rédaction. Chaque chapitre est terminé par des remarques générales et perspectives. Je présente ici un résumé détaillé de chacun de ces chapitres.

N.B. Les références en gras correspondent à celles où je suis auteur ou coauteur.

Partie I : Dérivation formelle et analyse numérique d'équations pour les écoulements mixtes en conduites fermées à géométrie et pente variables.

Dans le premier chapitre de cette thèse, je me suis intéressé au couplage entre un écoulement en charge et un écoulement à surface libre dans le cas d'une conduite à section variable. Comme le montre l'expérience, c'est un problème délicat compte tenu de l'instabilité du phénomène. De plus, celui-ci est en outre peu accessible aux mesures directes dans un contexte industriel. Le suivi en temps réel à l'aide d'une simulation numérique est d'un intérêt majeur pour les ingénieurs en tant qu'outil de validation et de prévision. Il existe en effet des risques très importants liés à des surpressions, compromettant l'intégrité de la structure. Ce type de problème se rencontre dans la modélisation des écoulements dans des réseaux d'assainissement lors d'orages violents, dans des canaux d'amenée en amont des usines hydroélectriques. La définition d'une stratégie et d'un modèle pour la prise en compte de l'entraînement d'air : poches d'air, cavitation en cas de forte dépression et aussi mélange air-eau sont à considérer. Ce travail est en cours de développement dans la dernière partie de cette thèse.

Le système **PFS** (**P**ressurized and **F**ree **S**urface) pour les écoulements à surface libre et en charge dans une conduite fermée à géométrie et à pente variables est donné par les équations

suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + p(x, A, E) \right) = -gA \frac{dZ}{dx} + Pr(x, A, E) - G(x, A, E) \\ -gK(x, A, E) \frac{Q|Q|}{A} \end{array} \right.$$

où t est la variable de temps, x l'abscisse curviligne suivant un axe privilégié d'écoulement. L'inconnue $A(t, x)$, homogène à une aire, est la variable « mixte » car elle permet de calculer tantôt le niveau d'eau à surface libre, tantôt la pression en charge. L'inconnue $Q(t, x)$ correspond au débit associé. Le terme de pression $p(x, A, E)$ est égal à la pression à surface libre (i.e. la pression hydrostatique) lorsque la variable d'état E est égale à 0, ou bien de type mixte hydrostatique-acoustique en cas de charge ($E = 1$). Cette pression est définie de façon à être continue à travers les points de transition (i.e. les points où il y a changement du type d'écoulement) mais le gradient de pression est nécessairement discontinu car il correspond à des vitesses d'onde d'ordre de grandeur très différents (quelques m/s pour la surface libre jusqu'à 1400m/s pour l'écoulement en charge dans le cas de l'eau) : le changement s'effectuant à travers chaque point de transition. Les termes sources sont :

- le terme de pente : $\frac{dZ(x)}{dx}$
- le terme source de pression : $Pr(x, A, E)$,
- le terme de courbure : $G(x, A, E)$,
- le terme de friction : $K(x, A, E)$.

La résolution numérique des équations **PFS** est basée sur un schéma explicite VFRoe avec traitement décentré des termes sources, suivant [6], que j'ai adapté au cas d'une conduite à section et pente variables pour un écoulement soit complètement en charge soit complètement à surface libre (c.f. Chapitre 2- Section 2.2). Les points de transition, c'est à dire les points de passage d'un type d'écoulement à un autre font bien sûr l'objet d'un traitement particulier. À cet effet, j'ai suivi la procédure décrite par Bourdarias *et al* [7] qui consiste à traiter l'interface de transition comme une frontière libre et à résoudre un problème de Riemann linéaire à *matrice discontinue*, reflétant la discontinuité du gradient de pression. Le calcul des états de part et d'autre de l'interface, coïncidant avec la ligne de discontinuité de la matrice, sont obtenus via une méthode que j'ai nommé « onde fantôme » et en utilisant les conditions d'admissibilité de Song *et al* [14] : la vitesse de transition est nécessairement comprise entre la vitesse caractéristique associée à l'état à surface libre et celle en charge. La méthode numérique VFRoe avec traitement de points de transition multiples dans une conduite à géométrie et pente variable a fait l'objet d'une publication [3].

Je présente également une approche cinétique basée sur les travaux de Perthame *et al* [13] que j'ai adaptée au cas des équations **PFS** (c.f. Chapitre 2-Section 2.3). Cette méthode repose sur la formulation cinétique de ces équations. Les avantages de cette approche par rapport à la méthode numérique précédente sont multiples :

- écriture facile du flux numérique à partir de l'équation microscopique (généralement une simple équation de transport linéaire),
- prise en compte, de manière naturelle, des écoulements sur fond sec et de l'assèchement,
- décentrement des termes sources basé sur une méthode de caractéristiques généralisées (permettant de les traiter simultanément : on fait apparaitre pour cela un terme unique que nous appelons « pseudo-topographie »),
- schéma bien équilibré.

Une première publication concernant cette méthode cinétique pour les équations en charge est présentée dans [2] et une autre publication à paraître [4] décrivant une façon de traiter les termes sources simultanément. Enfin, l'étude complète du schéma cinétique bien équilibré avec termes sources décentrés est en cours de rédaction [5]. Dans cette perspective, nous proposons une approche cinétique pour traiter les points de transition en cohérence avec le reste du schéma.

Partie II : Autour des équations primitives compressibles.

Au Chapitre 3 de cette thèse, en collaboration avec T. Ngom, nous avons étudié des équations primitives compressibles en dimension 2 d'espace dans lequel nous établissons un résultat d'existence de solutions faibles globales en temps. Cette étude a fait l'objet d'une note [10]. Nous avons également étudié avec M. Sy la version 3-dimensionnelle de ces équations et nous obtenons un résultat de stabilité pour les solutions faibles (un article a été récemment soumis [11]).

Dans la hiérarchie des modèles, les équations primitives se situent entre les équations non hydrostatiques et les équations de Saint-Venant. Elles sont généralement construites à partir des équations de Navier-Stokes pour la dynamique de l'atmosphère [15] en utilisant l'approximation hydrostatique et l'aspect ratio du domaine (dans le même esprit que Gerbeau *et al* [12] pour la dérivation des équations de Saint-Venant). Nous proposons, ici, une construction différente. Nous aboutissons à un système d'équations où le terme visqueux est de la forme $\text{div}(\nu(t, x, y)D(u))$ (où ν est une viscosité dépendant de la densité ρ et D est le tenseur de taux de déformation) à l'instar des équations primitives classiques dont la viscosité est constante et la diffusion est $\mu\Delta u$ (voir [15]).

Les équations en dimension 2 sont :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho \mathbf{u}) + \partial_y(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \partial_x(\rho \mathbf{u}^2) + \partial_y(\rho \mathbf{u}v) + \partial_x p &= \partial_x(\nu_1(t, x, y)\partial_x \mathbf{u}) + \partial_y(\nu_2(t, x, y)\partial_y \mathbf{u}), \\ \partial_y p &= -\rho g \end{cases} \quad (1)$$

où x et y représentent respectivement la variable d'espace horizontale et verticale. $(\mathbf{u}, v)$ est le champ de vitesse de composante horizontale $\mathbf{u}$ et verticale v , p est la loi de pression donnée par :

$$p(\rho) = c^2 \rho, \quad (2)$$

où c est une constante donnée par $c^2 = \mathcal{RT}$ où $\mathcal{R}$ est la constante spécifique de l'air et $\mathcal{T}$ la température. Les viscosités suivant l'horizontale ν_1 et suivant la verticale ν_2 sont données par :

$$\begin{aligned} \nu_1(t, x, y) &= \nu_0 e^{-g/c^2 y}, \\ \nu_2(t, x, y) &= \nu_0 e^{g/c^2 y}, \end{aligned}$$

où ν_0 est une constante positive.

En notant

$$\Omega = \{(x, y); 0 < x < l, 0 < y < h\}$$

et en imposant les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{x=0} &= \mathbf{u}|_{x=l} = 0, \\ v|_{y=0} &= v|_{y=h} = 0, \\ \partial_y \mathbf{u}|_{y=0} &= \partial_y \mathbf{u}|_{y=h} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

avec les données initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0(x, y), \\ \rho|_{t=0} &= \xi_0(x) e^{-g/c^2 y} \end{aligned} \quad (4)$$

nous obtenons le résultat d'existence suivant :

Théorème. Soient ξ_0 et $\mathbf{u}_0$ tels que :

$$(\xi_0, \mathbf{u}_0) \in W^{1,2}(\Omega), \quad \mathbf{u}_0|_{x=0} = \mathbf{u}_0|_{x=l} = 0.$$

Alors $\rho(t, x, y)$ est borné dans $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ et le système (1) munis des conditions aux limites (3) admet une solution faible globale en temps, i.e. il existe une famille de fonctions $(\rho, \mathbf{u}, v)$ telles que $\rho \geq 0$ et

$$\rho \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \quad \partial_t \rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (6)$$

qui satisfont (1) au sens des distributions. En particulier, pour toute fonction ϕ régulière à support compact et telle que $\phi|_{t=T} = 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{u} \partial_t \phi + \rho \mathbf{u}^2 \partial_x \phi + \rho \mathbf{u} v \partial_z \phi + \rho \partial_x \phi + \rho v \phi \, dx dy dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \nu_1 \partial_x \mathbf{u} \partial_x \phi + \nu_2 \partial_y \mathbf{u} \partial_y \phi \, dx dy dt + \int_\Omega \mathbf{u}_0 \rho_0 \phi|_{t=0} \, dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Les équations en dimension 3 sont :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v \mathbf{u}) + \nabla_x p(\rho) = 2 \operatorname{div}_x (\nu_1 D_x(\mathbf{u})) + \partial_y (\nu_2 \partial_y \mathbf{u}), \\ \partial_y p(\rho) = -g\rho \end{cases} \quad (8)$$

où $x = (x_1, x_2)$ et y représentent respectivement la variable d'espace horizontale et verticale. $(\mathbf{u} = (u_1, u_2), v)$ est le champ de vitesse de composante horizontale $\mathbf{u}$ et verticale v , p est la loi de pression donnée par (2). Le système est muni des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} & \text{conditions périodiques sur } \partial\Omega_x, \\ & v|_{y=0} = v|_{y=h} = 0, \\ & \partial_y \mathbf{u}|_{y=0} = \partial_y \mathbf{u}|_{y=h} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

avec les données initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x, y) &= \mathbf{u}_0(x, y), \\ \rho(0, x, y) &= \xi_0(x) e^{-g/c^2 y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Dans le cas de la dimension 3, on choisit les viscosités comme suit :

$$\begin{aligned} \nu_1(t, x, y) &= \nu \rho(t, x, y) e^{-g/c^2 y}, \\ \nu_2(t, x, y) &= \nu \rho(t, x, y) e^{2g/c^2 y}, \end{aligned}$$

où ν est une constante positive.

Il est bien connu que l'équation hydrostatique pose des difficultés pour obtenir des estimations à partir de l'énergie du système. En effet, l'énergie classique d'un système est obtenu en multipliant l'équation de la quantité de mouvement par le champ de vecteur $u = (\mathbf{u}, v)$. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho |u|^2 + \rho \ln \rho - \rho + 1 \, dx dy + \int_\Omega 2\nu_1 |D_x(u)|^2 + \nu_2 |\partial_y^2 u|^2 \, dx dy + \int_\Omega \rho g v \, dx dy = 0,$$

où, malheureusement, le signe de l'intégrale $\int_{\Omega} \rho g v dx$ est inconnu (dans cette égalité, $D_x(u)$ représente le tenseur de taux de déformation par rapport à la variable $x = (x_1, x_2)$). Pour palier cette difficulté, nous devons recourir à un modèle intermédiaire. Ce dernier est obtenu en exploitant l'équation hydrostatique $\partial_y p = -g\rho$ qui fournit $\rho = \xi e^{-y}$, après simplification $g = c^2$. L'inconnue ξ est alors solution du système intermédiaire :

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}_x (\xi \mathbf{u}) + \partial_z (\xi w) = 0, \\ \partial_t (\xi \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\xi \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_z (\xi w \mathbf{u}) + \nabla_x \xi = 2 \operatorname{div}_x (\nu_1 D_x(\mathbf{u})) + \partial_z (\nu_2 \partial_z \mathbf{u}), \\ \partial_z \xi = 0 \end{cases} \quad (11)$$

obtenu par le changement de variable $z = 1 - e^{-y}$ et $w = e^{-y}v$. Enfin, en combinant les estimations provenant de l'énergie du système (11) et les estimations obtenues à partir de l'entropie mathématique (voir, par exemple, [8]), on aboutit à un résultat de stabilité de solutions faibles. En cheminement inverse, ce résultat est « transporté » aux équations primitives compressibles (8). En particulier, on a le résultat suivant :

Théorème. *Soit $(\rho_n, \mathbf{u}_n, v_n)$ une suite de solutions faibles du système (11) munis des conditions aux limites (9) et des données initiales (10), satisfaisant l'inégalité d'énergie :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\xi \frac{\mathbf{u}^2}{2} + (\xi \ln \xi - \xi + 1) \right) dx dz + \int_{\Omega} \xi \nu (2 |D_x(\mathbf{u})|^2 + |\partial_z \mathbf{u}|^2) dx dz + r \int_{\Omega} \xi |\mathbf{u}|^3 dx dz \leq 0$$

et l'inégalité d'entropie avec $\psi = \mathbf{u} + 2\nu \nabla_x \ln \xi$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\xi \frac{|\psi|^2}{2} + \xi \ln \xi - \xi + 1 \right) dx dz \\ & + \int_{\Omega} \left(2\nu \xi |\partial_z w|^2 + 2\nu \xi |A_x(\mathbf{u})|^2 + \nu \xi |\partial_z \mathbf{u}|^2 \right) dx dz \\ & + \int_{\Omega} \left(r \xi |\mathbf{u}|^3 + 2\nu r |\mathbf{u}| \mathbf{u} \nabla \xi + 8\nu \left| \nabla_x \sqrt{\xi} \right|^2 \right) dx dz \leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Soient ρ_0^n et $\mathbf{u}_0^n$ une suite de données initiales telles que :

$$\rho_n \geq 0, \quad \rho_0^n \rightarrow \rho_0 \text{ dans } L^1(\Omega), \quad \rho_0^n \mathbf{u}_0^n \rightarrow \rho_0 \mathbf{u}_0 \text{ dans } L^1(\Omega). \quad (13)$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite :

- ρ_n converge fortement dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^{3/2}(\Omega))$,
- $\sqrt{\rho_n} \mathbf{u}_n$ converge fortement dans $L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega)^2)$,
- $\rho_n u_n$ converge fortement dans $L^1(0, T; L^1(\Omega)^2)$ pour tout $T > 0$,
- $(\rho_n, \sqrt{\rho_n} \mathbf{u}_n, \sqrt{\rho_n} v_n)$ converge vers une solution faible de l'équation de la conservation de la masse du système (8)-(3),
- $(\rho_n, \mathbf{u}_n, v_n)$ converge vers une solution faible de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du système (8)-(3).

Partie III : Travaux en cours et perspectives.

Dans cette partie, j'ai regroupé tous les travaux actuellement en cours de développement.

Premiers pas vers la cavitation.

Au Chapitre 4, en lien avec les écoulements en conduite fermée, j'ai étudié un modèle pour la prise en compte de l'air sous forme d'un modèle bi-couche. C'est une étape préliminaire pour la modélisation de la cavitation.

Comme le montre l'expérience, la surpression due au coup de bélier peut provoquer de fortes tensions du matériau, voire sa rupture. D'autre part, une surpression est généralement suivie d'une onde de dépression. Si la pression atteint la pression de vapeur, alors des bulles se forment. En particulier, lorsque ces bulles de vapeur rencontrent une zone de haute pression, elles implosent en produisant « un bruit de cailloux secoués », endommageant et usant prématurément la structure. C'est le cas par exemple au voisinage d'une pompe où, en amont, une zone de dépression peut être observée, tandis qu'au voisinage de la pompe règne une zone de haute pression. On rencontre aussi le problème dans les zones de fort rétrécissement de la conduite. Par exemple, dans une conduite à géométrie convergente, au fur et mesure que la conduite rétrécit, la vitesse s'accélère et la pression peut diminuer avec risque de cavitation. Le champ d'action de la cavitation est varié, il concerne le domaine de l'aérospatiale, le génie civil, l'automobile, l'industrie pétrolière, le nucléaire, le biomédical et même la faune !

C'est un problème délicat pouvant entraîner des dommages irréversibles. À titre d'exemple, le 15 novembre 1999, la fusée japonaise de transport de satellites finit son vol dans l'océan ; les scientifiques ont montré que la cavitation a provoqué l'usure prématurée d'une pale de la turbo pompe d'injection d'hydrogène liquide qui s'est détachée. Les claquements des articulations du corps humain sont la conséquence d'un phénomène de cavitation. En effet, au sein du liquide synovial (lubrificateur naturel pour les cartilages), des cavités de gaz peuvent apparaître. Lorsqu'elle rencontre des zones où la pression est plus élevée, le gaz se condense et provoque ce bruit. Les conséquences peuvent être éventuellement très douloureuses.

La cavitation peut parfois être technologiquement exploitée : pendant la guerre froide, une arme destinée à remplacer les torpilles et les missiles voit le jour : le CHKAVAl. Il est capable d'atteindre des vitesses de 360 km/h sous l'eau et de frapper un sous marin avant qu'il ne s'en rende compte ou encore de voler en plein air pour aller couler un bateau. Le principe est décrit comme suit : la transformation de l'eau au contact du CHKAVAl en une fine couche de vapeur a pour conséquence de réduire la traînée. C'est ce que l'on appelle la super-cavitation.

Un autre exemple concerne une crevette tropicale. Elle possède une pince surdéveloppée par rapport à l'autre qui lui permet de créer une bulle de cavitation pour assommer où tuer le plancton environnant. Il existe de nombreux exemples dans la « vie de tous les jours » où la cavitation intervient en provoquant des dommages ou au contraire peut être utilisée. Ce rapide tour dans le monde de la cavitation montre bien son importance, les enjeux économiques et donc l'utilité de modéliser ce phénomène pour mieux le comprendre et prévenir des dégâts qu'il peut occasionner. La partie concernant la cavitation consistera essentiellement à faire un historique depuis Berthelot et Reynolds.

En vue de modéliser ce phénomène complexe dans les conduites fermées, j'envisage d'utiliser un modèle bi-couche avec transfert de masse chacune des couches étant diphasique. Pour me familiariser avec les modèles bi-couches, j'ai commencé par la modélisation de l'entraînement d'air via un « modèle jouet ». Ce modèle est issu des hypothèses simplificatrices suivantes : les couches sont non miscibles, la couche de gaz est compressible, la température est constante tout le long du processus, la pression est continue à l'interface air-eau, enfin il n'y a aucun échange avec le milieu extérieur. Dans ces conditions, j'obtiens un modèle possédant une entropie mathématique. L'énergie dissipée par la couche d'air est gagnée par la couche d'eau et vice et versa. Les équations

sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M + \partial_x D = 0 \\ \partial_t D + \partial_x \left(\frac{D^2}{M} + \frac{M}{\gamma} c_a^2 \right) = \frac{M}{\gamma} c_a^2 \partial_x (S - A) \\ \partial_t A + \partial_x Q = 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + g I_1(x, A) \cos \theta + A \frac{c_a^2 M}{\gamma (S - A)} \right) = -g A \partial_x Z \\ \quad + I_2(x, A) \cos \theta \\ \quad + \frac{c_a^2 M}{\gamma (S - A)} \partial_x A \end{array} \right. \quad (14)$$

où t est la variable de temps, $x \in \mathbb{R}$ la variable d'espace, où $M(t, x)$ est la densité de masse volumique de l'air, $A(t, x)$ la surface mouillée, $D(t, x)$ et $Q(t, x)$ sont respectivement le débit d'air et d'eau, $c_a^2(t, x)$ est la vitesse du son dans l'air calculée en fonction de la loi des gaz parfait de coefficient adiabatique γ ($= 7/5$ pour l'air), $S(x)$ la section de la conduite, $I_1(x, A)$ le terme de pression hydrostatique, $\frac{dZ(x)}{dx}$ le terme de pente et $I_2(x, A)$ le terme source de pression.

L'inconvénient de ce type de système est qu'il n'est hyperbolique que lorsque la vitesse des deux couches sont proches. De manière générale (en particulier dans notre cas où les vitesses peuvent être très différentes) le spectre de la matrice de convection est composée de deux valeurs propres réelles et de deux valeurs propres complexes. De plus, le calcul de ces dernières n'est pas explicite. Par conséquent, la résolution numérique à l'aide d'une méthode Volumes Finis en résolvant le problème de Riemann aux interfaces ne sera pas considérée. En revanche, un solveur cinétique convient parfaitement puisqu'il ne nécessite aucun calcul de valeurs propres. On utilise ainsi la méthode cinétique telle qu'elle sera décrite dans la première partie. Ce travail a été soumis [1].

Modélisation de la sédimentation.

Au Chapitre 5, en collaboration avec T. Ngom, on présente la dérivation formelle d'un modèle de sédimentation pour les écoulements en surface libre. Un article est en cours de préparation [9].

Pour prendre en compte la sédimentation, on utilise l'équation de Vlasov couplée à un modèle de Navier-Stokes compressible avec un tenseur de viscosité anisotrope. On se place dans un cadre simplifié, à savoir les particules sont de même taille (afin d'éviter le problème de la granulométrie) et soumises à la gravité. Plus précisément, en se basant sur les travaux de Goudon *et al*, et en ajoutant le terme de gravité, l'équation de Vlasov s'écrit :

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x(vf) + \operatorname{div}_v((F + \vec{g})f) = r \Delta_v f \quad (15)$$

où f est la densité de particules, $v \in \mathbb{R}^3$ la vitesse cinétique d'une particule soumise à la force de gravité $\vec{g} = (0, 0, -g)^t$ et F la force de friction de Stokes. Le terme de diffusion $r \Delta_v f$ décrit le mouvement Brownien des particules où $r > 0$ est la vitesse de diffusion donnée par la formule d'Einstein.

D'un autre côté, le fluide, supposé compressible, est gouverné par les équations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w u) = 0, \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho_w u) + \operatorname{div}(\rho_w u \otimes u) + \nabla p(t, x) = \operatorname{div} \sigma(\rho_w, u) + \mathfrak{F}, \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p(t, x) \end{array} \right. \quad (18)$$

où $u(t, x) = (u_1, u_2, u_3)(t, x)$ est le champ de vitesse et $\rho_w(t, x)$ la densité. Le terme p est une pression barotrope non homogène tenant en compte l'effet des sédiments dans le fluide. Le terme $\sigma(\rho_w, u)$ est le tenseur de contrainte :

$$-pI_3 + 2\Sigma(\rho_w) : D(u) + \lambda(\rho_w)\text{div}(u) I_3$$

où I_3 correspond à la matrice identité et $\Sigma(\rho_w)$ est le tenseur de viscosité anisotrope :

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\rho_w) & \mu_1(\rho_w) & \mu_2(\rho_w) \\ \mu_1(\rho_w) & \mu_1(\rho_w) & \mu_2(\rho_w) \\ \mu_3(\rho_w) & \mu_3(\rho_w) & \mu_3(\rho_w) \end{pmatrix}$$

où $\mu_i \neq \mu_j, \forall i \neq j$. En particulier, le tenseur visqueux $\Sigma(\rho_w) : D(u)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\rho_w)\partial_{x_1}u_1 & \frac{\mu_1(\rho_w)}{2}(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2) & \frac{\mu_2(\rho_w)}{2}(\partial_{x_3}u_1 + \partial_{x_1}u_3) \\ \frac{\mu_1(\rho_w)}{2}(\partial_{x_1}u_2 + \partial_{x_2}u_1) & \mu_1(\rho_w)\partial_{x_2}u_2 & \frac{\mu_2(\rho_w)}{2}(\partial_{x_3}u_2 + \partial_{x_2}u_3) \\ \frac{\mu_3(\rho_w)}{2}(\partial_{x_1}u_3 + \partial_{x_3}u_1) & \frac{\mu_3(\rho_w)}{2}(\partial_{x_2}u_3 + \partial_{x_3}u_2) & \mu_3(\rho_w)\partial_{x_3}u_3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Un premier couplage a donc lieu au niveau du terme de pression. Le deuxième est réalisé à l'aide du terme source $\mathfrak{F}$ qui inclut la force de gravité :

$$\mathfrak{F} = - \int_{\mathbb{R}^3} F f dv + \rho_w \vec{g}. \quad (20)$$

En particulier, le terme $-\int_{\mathbb{R}^3} F f dv$ permet de prendre en compte la contribution des sédiments interagissant dans le fluide.

Une première analyse asymptotique comparant un temps caractéristique à celui du temps de relaxation permet d'obtenir, après intégration contre 1 et v , la limite hydrodynamique de l'équation de Vlasov. En ajoutant ces dernières au système de Navier-Stokes, on obtient les équations que l'on nomme : modèle de « mélange » :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \text{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x P = 2 \left(\text{div}(\Sigma^0 : D(u)) + \nabla(\lambda(\rho)\text{div}(u)) \right) - g\rho \vec{k}. \end{cases}$$

où

$$P = p(\rho) + \theta \rho_s$$

et $\sqrt{\theta}$ est une fluctuation de vitesse. Enfin, une analyse asymptotique en couche mince, sur le modèle ci-dessus, permet d'obtenir les équations de transport de sédiments :

$$\begin{cases} \partial_t h + \text{div}(h\bar{u}) & = 0, \\ \partial_t(h\bar{u}) + \text{div}(h\bar{u} \otimes \bar{u}) + gh\nabla \left(\frac{h}{3} + b \right) & = \text{div}(hD(\bar{u})) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ \partial_t b + u\nabla_x b & = v. \end{cases}$$

où l'équation sur b gouverne la partie morphodynamique du fond variable. Les équations ainsi obtenues sont différentes de celle de Saint-Venant-Exner à cause du coefficient $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. Air entrainment in transient flows in closed water pipes : a two-layer approach. *Submitted, available at <http://arxiv.org/abs/0910.0334>*, 2009.
- [2] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. A kinetic scheme for pressurised flows in non uniform closed water pipes. *Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, Vol. 31 :1–20, 2009.
- [3] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. A model for unsteady mixed flows in non uniform closed water pipes and a well-balanced finite volume scheme. *International Journal On Finite Volumes*, 6(2) :1–47, 2009.
- [4] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. A kinetic scheme for transient mixed flows in non uniform closed pipes : a global manner to upwind all the source terms. *To appear in J. Sci. Comp.*, 2010.
- [5] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. Unsteady mixed flows in non uniform closed water pipes : a Full Kinetic Approach. *In preparation*, 2010.
- [6] C. Bourdarias and S. Gerbi. A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes. *J. Comp. Appl. Math.*, 209(1) :109–131, 2007.
- [7] C. Bourdarias and S. Gerbi. A conservative model for unsteady flows in deformable closed pipe and its implicit second order finite volume discretisation. *Computers & Fluids*, 37 :1225–1237, 2008.
- [8] D. Bresch and B. Desjardins. Some diffusive capillary models of Korteweg type. *C. R. Acad. Sciences*, 332(11) :881–886, 2004.
- [9] M. Ersoy and T. Ngom. Dérivation formelle des équations de Saint-Venant-Exner en surface libre. *In preparation*, 2010.
- [10] M. Ersoy and T. Ngom. Existence of a global weak solution to one model of compressible primitive equations. *Submitted, available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00487370/fr/>*, 2010.
- [11] M. Ersoy, T. Ngom, and M. Sy. Compressible primitive equations : formal derivation and stability of weak solutions. *Submitted, available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00488398/fr/>*, 2010.
- [12] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102, 2001.
- [13] B. Perthame and C. Simeoni. A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo*, 38(4) :201–231, 2001.
- [14] C.S.S. Song, J.A. Cardle, and K.S. Leung. Transient mixed-flow models for storm sewers. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 109(11) :1487–1503, 1983.
- [15] R. Temam and M. Ziane. *Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics*. North-Holland, Amsterdam, 2004.

PARTIE I

Modélisation des équations en conduite fermée

CHAPITRE 1

Les équations PFS

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.1.1	Autour des équations de Saint-Venant	5
1.1.2	Autour des écoulements mixtes	6
1.2	Dérivation formelle des équations à surface libre	9
1.2.1	Équations d'Euler incompressibles en coordonnées curvilignes	13
1.2.1.1	Équation de la divergence	13
1.2.1.2	Équations de la conservation de la quantité de mouvement	14
1.2.2	Le modèle à surface libre	16
1.2.2.1	Analyse asymptotique formelle	17
1.2.2.2	Moyennisation des équations d'Euler (1.31)-(1.34)	18
1.3	Dérivation formelle des équations en charge	24
1.3.1	Équations d'Euler compressibles en coordonnées curviligne	25
1.3.1.1	Équation de conservation de la masse	25
1.3.1.2	Équation de la conservation de la quantité de mouvement	26
1.3.2	Le modèle en charge	26
1.3.2.1	Analyse asymptotique formelle	26
1.3.2.2	Moyennisation des équations d'Euler (1.67)-(1.68)	27
1.4	Les équations PFS	30
1.5	Conclusion et perspectives	35

Ce chapitre est un développement de la première partie de l'article :

C. Bourdarias, **M. Ersoy** and S. Gerbi. *A model for unsteady mixed flows in non uniform closed water pipes and a well-balanced finite volume scheme*. International Journal On Finite Volumes, 6(2) :1-47, 2009.

NOTATIONS

- $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$: base cartésienne
- $\omega(x, 0, b(x))$: représentation paramétrique dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de la courbe plane $\mathcal{C}$ correspondant à l'axe d'écoulement principal
- $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$: repère de Serret-Frenet le long de $\mathcal{C}$ avec $\mathbf{T}$ le vecteur unitaire tangent, $\mathbf{N}$ la normale et $\mathbf{B}$ le vecteur binormal
- X, Y, Z : coordonnée locale dans le repère de Serret-Frenet où X est l'abscisse curviligne, Y la largeur de la conduite, Z la $\mathbf{B}$ -coordonnée.
- $\sigma(X, Z) = \beta(X, Z) - \alpha(X, Z)$: largeur de la conduite avec $\beta(X, Z)$ (resp. $\alpha(X, Z)$) le point de frontière droit (resp. gauche) à l'altitude Z
- $\theta(X)$: angle $(\mathbf{i}, \mathbf{T})$
- $S(X)$: section transverse
- $R(X)$: rayon de la section $S(X)$
- $\mathbf{n}_{\text{wb}}$: vecteur normal unitaire sortant à la frontière mouillée en contact avec la conduite
- $\mathbf{n}$: vecteur normal unitaire sortant au point $m \in \partial\Omega$

Notations concernant le modèle en surface libre

- $\Omega(t, X)$: section à surface libre
- $H(t, X)$: hauteur d'eau physique
- $h(t, X)$: Z -coordonnée du niveau d'eau
- $\mathbf{n}_{\text{fs}}$: vecteur normal à la surface libre suivant $\mathbf{B}$
- $A(t, X)$: section d'aire mouillée
- $Q(t, X)$: débit
- ρ_0 : densité de l'eau à pression atmosphérique p_0

Notations concernant le modèle en charge

- $\Omega(X)$: section en charge
- $\rho(t, X)$: densité de l'eau
- β : coefficient de compressibilité de l'eau
- $c = \frac{1}{\sqrt{\beta \rho_0}}$: vitesse d'onde en charge
- $A(t, X) = \frac{\rho}{\rho_0} S$: section d'aire mouillée équivalente
- $Q(t, X)$: débit

Notations concernant le modèle PFS

- **PFS** : **P**ressurised and **F**ree **S**urface
- $\mathbf{S}(t, X)$: section d'eau physique : $\mathbf{S}(t, X) = A(t, X)$ si (t, X) est dans une zone surface libre, $S(X)$ sinon
- $\mathcal{H}(t, X)$: Z -coordonnée du niveau d'eau : $\mathcal{H}(t, X) = h(t, X)$ si (t, X) est dans une zone surface libre, $R(X)$ sinon

Autres notations

- à l'exception de $\mathbf{S}$, tous les autres caractères en gras dénotent un vecteur.

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux écoulements unidimensionnels dans des domaines de type « couche mince » possédant un axe d'écoulement privilégié et dont le vecteur vitesse d'écoulement est parallèle à cet axe. En particulier, le profil des vitesses est constant dans toute la section.

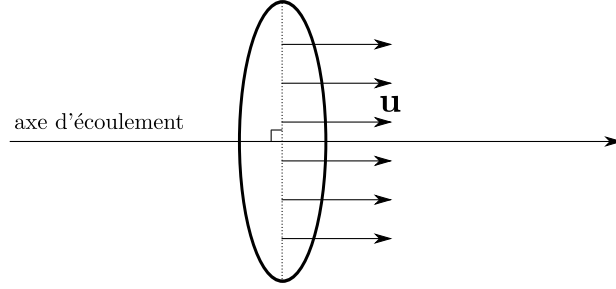


FIGURE 1.1 – Profil de vitesse constant dans toute la section

1.1.1 Autour des équations de Saint-Venant

Dans ce contexte, on présente un modèle de type Saint-Venant pour les écoulements mixtes en conduite fermée et à section variable. Un écoulement mixte, par définition, est un écoulement tantôt à surface libre, tantôt en charge (lorsque la conduite est pleine).

Les équations de Saint-Venant, généralement écrites sous forme conservatives, sont classiquement utilisées pour modéliser les écoulements à surface libre en « eaux peu profondes » : i.e. lorsque la longueur est grande devant la hauteur d'eau. Le système de Saint-Venant initialement introduit dans sa version mono-dimensionnelle dans un Compte Rendu à l'Académie des Sciences en 1871 par A.J.C. Barré de Saint-Venant est un système hyperbolique décrivant l'écoulement d'eau dans un canal rectiligne à fond plat en termes de hauteur d'eau $h(t, x)$ et de vitesse moyennée selon la direction verticale, $u(t, x)$:

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = 0, \end{cases}$$

où g désigne la gravité. La seconde variable conservative $q(t, x) = h(t, x)u(t, x)$ considéré dans ce modèle désigne le débit. Ce modèle permet d'écrire divers phénomènes impliquant des fluides géophysiques à surface libre en écoulement « peu profond ». Ce système peut inclure de nombreux termes sources adaptés aux besoins spécifiques des phénomènes modélisés, comme des termes tenant compte des variations de topographie, des termes dissipatifs de diffusion ou de friction. Son champ de validité et d'application s'avère donc être très étendu. Dans le cas d'un canal (ou conduite fermée) non rectangulaire à section constante, ces équations peuvent être réécrites sous une formulation mono-dimensionnelle aire mouillée $A(t, x)$ et débit $Q(t, x)$ comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1(A) \right) = 0 \end{cases}$$

où

$$I_1 = \int_0^{h(A)} (h(A) - z)\sigma(z)dz$$

est le terme de pression hydrostatique, $h(A)$ est la hauteur d'eau et $\sigma(x, z_0)$ la largeur du domaine à $z = z_0$ (c.f. FIG. 1.2).

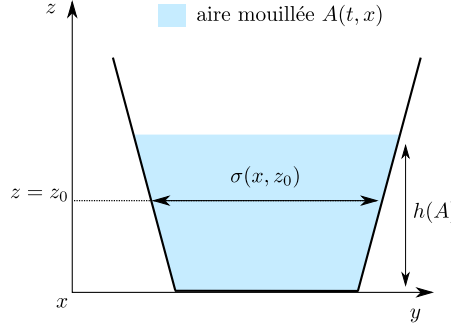


FIGURE 1.2 – Un exemple de canal non rectangulaire

En particulier, lorsque le canal (ou la conduite) est rectangulaire, i.e. lorsque $\sigma(x, z)$ est constante, on retrouve la formulation de Saint-Venant en variable (h, q) .

1.1.2 Autour des écoulements mixtes

Le problème de la simulation des écoulements mixtes a été largement étudié. La méthode la plus ancienne est celle de la fente de Preissmann ou fente piezométrique ([40, 39, 38]). Les équations de Saint-Venant combinées à la technique de fente de Preissmann s'avèrent être un outil simple pour modéliser les écoulements mixtes en conduite fermée (aussi bien pour les écoulements à surface libre qu'en charge). Le principe de la fente piezométrique est le suivant : on imagine que la conduite, sur toute sa longueur, est surmontée d'une étroite fente de largeur T_{fente} (c.f. FIG. 1.3). Dans ces conditions, le passage en charge est analysé comme un écoulement à surface libre dont la quantité d'eau $A := A_{\text{max}} + A_{\text{fente}} > A_{\text{max}}$ mais proche de A_{max} , autrement dit la hauteur d'eau $h := h_{\text{max}} + h_{\text{fente}} > h_{\text{max}}$. Plus précisément, lorsqu'il y a passage en charge, la fente piezométrique est un outil de mesure de surpression grâce à la hauteur piezométrique h_{fente} . L'ajustement de la largeur de la fente T_{fente} est très importante, car il peut survenir des problèmes de conservativité de masse si elle est trop grande ou des instabilités numériques si elle est trop petite par rapport au diamètre de la conduite. Généralement, la largeur T_{fente} est choisie

de façon à ce que la vitesse d'onde $c = \sqrt{\frac{gA}{T_{\text{fente}}}}$ soit celle associée à un écoulement en charge.

Cette méthode a été utilisée entre autre par les auteurs Baines *et al.* [6], Garcia-Navarro *et al.* [51], Capart *et al.* [34] et Tseng [104]. Dans [6], les auteurs résolvent le problème à l'aide d'une méthode de type Roe décentré. Basé sur les méthodes à Variation Totale Décroissante (TVD), dans [51], les auteurs proposent une méthode implicite d'intégration temporelle avec linéarisation conservative qui leur permet d'obtenir un système d'équations tri-diagonal par blocs qui peut être résolu par une méthode non-itérative de décomposition matricielle. Dans [34], les auteurs adoptent un schéma décentré vers l'amont pour capter les ressauts hydrauliques à l'aide de l'algorithme de prédiction de flux de Pavie (P.F.P). Enfin dans, [104], Tseng résout le problème à l'aide d'un schéma aux différences finies de type « shock-capturing ». Cependant, l'artifice de la fente de Preissmann ne permet pas, dans les zones en charge, de traiter les fortes variations de pression puisque les écoulements à pression sub-atmosphérique (i.e. les dépressions) sont perçus comme une descente à surface libre. Par conséquent, il en est de même pour le phénomène de coup de bélier. Un suivi d'interface entre les deux types d'écoulement est alors nécessaire

pour palier cette difficulté. Cette correction est apportée par Wiggert [105] et Song [96]. Une autre approche est développée par Kerger *et al.* [67, 68], en introduisant la fente de Preissmann négative, spécialement pour traiter les écoulements sub-atmosphériques.

Au même titre que la méthode de la fente de Preissmann, McCorquodale *et al.* [61, 76] introduisent la technique de « rigid water column » qui permet de traiter la partie de l'écoulement en charge comme une colonne d'eau rigide se déplaçant à vitesse uniforme.

Cependant, aucune des techniques citées ci-dessus ne prend en compte la physique de l'écoulement en charge, à savoir la compressibilité de l'eau. En effet, un écoulement en charge requiert un traitement dynamique [48] *et* compressible (ou faiblement compressible) dont la célérité c (la même que ci-dessus) est fonction de la densité du fluide. Dans un fluide compressible (ou faiblement compressible), les ondes de surpression et de dépression qui surviennent lors d'un changement brutal (voire lent) se propagent à la vitesse c , de même pour un coup de bélier (qui par définition est constitué d'un ensemble de variations de pression provoquées par la modification brusque du régime d'écoulement). Il apparaît alors qu'une vitesse du son mal calculée capte peu, voire pas du tout, ce genre de phénomène. En particulier, la fente de Preissmann n'est pas l'approche la mieux adaptée [97, 48].

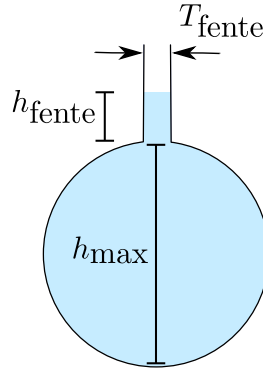


FIGURE 1.3 – Fente de Preissmann

Fuamba propose dans [48] un modèle mixte avec des équations de type Saint-Venant pour les écoulements à surface libre et il assimile le passage en charge comme solution d'un système compressible de la forme $u(x - wt)$ où w est la vitesse de propagation de l'interface satisfaisant les conditions de transition de Song *et al.* [97]. Dans cette approche, le caractère compressible de l'eau pour l'écoulement en charge est pris en compte. La prédiction du point de transition et du suivi de l'interface (séparant les deux types d'écoulement) est étudiée.

Cependant, les équations les plus simples qui prennent en compte la physique d'un écoulement en charge sont les équations de propagation d'ondes longitudinales dans un milieu non dissipatif [9]. Ces équations également connues sous le nom d'équations d'Allievi, se présentent sous la forme non conservative suivante :

$$\begin{cases} \partial_t p + \frac{c^2}{gS} \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + gS \partial_x p = 0 \end{cases}$$

où $c = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho}}$ est la célérité de l'onde avec β le coefficient de compressibilité du fluide, $p(t, x)$ la pression, S la section maximale, $Q(t, x) = \rho S u(t, x)$ le débit massique et ρ la masse volumique du

fluide. On suppose ici que la conduite est horizontale et non dilatable, ce qui explique l'absence de termes sources. On peut écrire ces équations sous forme de deux équations des ondes linéaires découplées :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 p - c^2 \partial_{xx}^2 p = 0, \\ \partial_{tt}^2 Q - c^2 \partial_{xx}^2 Q = 0 \end{cases}$$

dont les solutions générales de l'équation

$$\partial_{tt}^2 \phi - c^2 \partial_{xx}^2 \phi = 0$$

sont données par :

$$\phi = F_m(t - x/c) + F_p(t + x/c).$$

Les formules d'Allievi donnent alors :

$$\begin{cases} h = h_0 + F_m(t - x/c) + F_p(t + x/c), \\ u = u_0 + \frac{g}{c} (F_m(t - x/c) + F_p(t + x/c)) \end{cases}$$

où $p(t, x) = \rho gh(t, x)$ avec h_0 une hauteur piezométrique et Q_0 un débit donné. Dans ces expressions :

- F_m désigne alors une onde de dépression ou surpression se propageant dans le sens des $x > 0$ à la vitesse c , et
- F_p désigne une onde de dépression ou surpression se propageant dans le sens des $x < 0$ à la vitesse c .

Ces équations sont résolues par une méthode des caractéristiques [106]. Bien que la compressibilité du fluide soit prise en considération dans les équations d'Allievi, il est impossible de simuler des écoulements à surface libre. D'autre part, les termes d'accélération manquant dans les équations d'Allievi rendent la formulation conservative impossible. Par conséquent, ces équations ne sont pas adaptées pour un traitement Volume Finis comme on l'envisage dans la suite. Par ailleurs, un couplage entre des équations de type Saint-Venant et des équations « à la Allievi » (qui prennent en compte la physique d'un écoulement en charge) s'avère être efficace d'un point de vue modélisation et implémentation numérique (voir Chapitre 2).

Ainsi, on propose un modèle mixte, qui soit à la fois *simple par sa formulation*, qui prenne en compte d'une part l'*incompressibilité de l'eau en écoulement à surface libre* et d'autre part la *compressibilité de l'eau en écoulement en charge* dans un formalisme. Par le biais de variables conservatives convenables, on couple des équations de type Saint-Venant pour les écoulements en charge :

$$\begin{cases} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left(\frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -g A_{ch} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) - G(x, A_{ch}) \\ \quad - K(x, A_{ch}) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}} \end{cases} \quad (1.1)$$

à des équations de Saint-Venant :

$$\begin{cases} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left(\frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -g A_{sl} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) - G(x, A_{sl}) \\ \quad - K(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}} \end{cases} \quad (1.2)$$

pour obtenir un modèle, qu'on appelle **PFS**-modèle (**P**ressurized and **F**ree **S**urface), pour les écoulements en conduite à section variable, non déformable avec terme de topographie :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + p(x, A, E) \right) &= -gA \frac{dZ}{dx} + Pr(x, A, E) - G(x, A, E) \\ &\quad - gK(x, A, E) \frac{Q|Q|}{A} \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans ces équations, les quantités A_α , Q_α et p_α pour $\alpha = ch$ (ch pour charge) ou $\alpha = sl$ (sl pour surface libre) représentent respectivement l'aire mouillée, le débit et la pression dans l'état α . La quantité A , dite variable « mixte », est égale à A_α si l'écoulement est de type α et p est une pression « mixte » continue au point de transition (i.e. lorsque l'écoulement change de nature) et à dérivée discontinue. Soit E un indicateur d'état α tel que $E = 1$ si $\alpha = ch$ et 0 sinon, alors

$$p(x, A, E) = p_{sl}(x, A) + E(p_{sl}(x, A) - p_{ch}(x, A)).$$

Les termes sources sont des termes :

- de pente : $\frac{dZ(x)}{dx}$
- sources de pression : $Pr(x, A, E)$,
- de courbure : $G(x, A, E)$,
- de friction : $K(x, A, E)$.

Le système permet de simuler des ondes de dépression et de surpression (comme pour les équations d'Allievi) lors d'écoulement en charge et de suivre, par un algorithme discret, les points de transition (comme la méthode proposée par Fuamba [48]) avec les conditions de Song *et al.* [97] (par une approche « onde fantôme » présentée au Chapitre 2-Section 2.2.3 et par une approche cinétique, appelé FKA, exposée au Chapitre 2-Section 2.3.3).

Plan du chapitre

Ce chapitre est divisé en trois sections.

La première section (Section 1.2) est consacrée à la dérivation des équations à surface libre à partir des équations d'Euler 3D incompressibles écrites dans un repère local mobile, en vue de décrire précisément les effets engendrés par les variations de section et de pente. Il apparait alors naturellement le terme source de courbure G (voir les équations (1.2)). Les équations sont ensuite moyennées suivant les sections verticales orthogonales à l'axe d'écoulement. On aboutit alors aux équations (1.2). En prenant comme point de départ les équations d'Euler 3D compressibles et en procédant de la même manière que pour la dérivation des équations à surface libre, on aboutit aux équations en charge (1.1). Dans la dernière partie de ce chapitre (Section 1.4), on présente les équations **PFS** qui sont une généralisation des équations pour les écoulements mixtes en conduite uniforme par Bourdarias *et al.* [18, 19]. Elles sont obtenues par un couplage des équations en surface libre et en charge.

1.2 Dérivation formelle des équations à surface libre

Les équations de Saint-Venant sont utilisées pour modéliser les écoulements à surface libre des rivières, des zones côtières, les problèmes de sédimentation, et en toute généralité les situations physiques qui se rapportent à un écoulement dit « peu profond ». Elles sont généralement obtenues à partir des équations d'Euler incompressibles (voir par exemple [2, 75]) ou à partir

des équations de Navier-Stokes incompressibles (voir [54, 31, 79, 21, 13, 93]) par différentes techniques (e.g. par méthode de moyennisation directe ou analyse asymptotique) où encore [41] et plus particulièrement Bouchut *et al.* [12, 13] sur lesquels est basé ce premier chapitre.

Les équations de Saint-Venant que l'on utilise dans cette section sont utilisées pour modéliser des écoulements à surface libre dans des conduites à géométrie complexe avec pente variable. On considère que la longueur de la conduite est suffisamment grande devant son diamètre de manière à supposer l'existence d'un axe d'écoulement privilégié. Pour obtenir ces équations, on écrit, dans un premier temps, les équations d'Euler incompressibles dans un repère de Serret-Frenet [12, 13] pour décrire, localement, les effets engendrés par les variations de section et de pente. Ensuite, tirant parti de la configuration des échelles caractéristiques, on procède à une analyse « couche mince » en fonction d'un « petit » paramètre ε , rapport des échelles caractéristiques des mouvements verticaux et horizontaux. Enfin, en intégrant les équations le long des sections orthogonales à une courbe plane donnée (généralement c'est l'axe d'écoulement en charge qui est choisi ; voir Remarque 1.4.1), on aboutit aux équations à surface libre (1.2).

Dans toute la suite du chapitre, on considère des conduites circulaires à section variable en espace. Par ailleurs, cette analyse peut être facilement adaptée à tout type de conduite.

Soit $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère cartésien, par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les équations d'Euler dans les coordonnées cartésiennes sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{U}) &= 0 \\ \partial_t(\rho_0 \mathbf{U}) + \rho_0 \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \nabla P &= \rho_0 \mathbf{F} \end{cases} \quad (1.4)$$

où $\mathbf{U}(t, x, y, z)$ représente le vecteur vitesse de composantes (u, v, w) , $P = p(t, x, y, z)I_3$ le tenseur de pression isotrope, ρ_0 la masse volumique du fluide à pression atmosphérique p_0 et $\mathbf{F}$ le terme

source de gravité défini par $\mathbf{F} = -g \begin{pmatrix} -\sin \theta(x) \\ 0 \\ \cos \theta(x) \end{pmatrix}$ où $\theta(x)$ est l'angle $(\mathbf{i}, \mathbf{T})$ dans le plan $(\mathbf{i}, \mathbf{k})$

(c.f. FIG. 1.4 ou FIG. 1.5) avec $\mathbf{T}$ le vecteur tangent (défini ci-dessous) et g la constante de gravité.

On introduit une fonction indicatrice ϕ pour définir la zone fluide (voir [54, 79]) :

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega(t, x), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

où $\Omega(t, x)$ est la section mouillée (définie en (1.10)). En utilisant l'équation à divergence nulle, il découle l'équation de la conservation de la masse suivante :

$$\partial_t(\rho_0 \phi) + \operatorname{div}(\rho_0 \phi \mathbf{U}) = 0. \quad (1.6)$$

Remarque 1.2.1. C'est l'équation (1.6) qui permet d'obtenir la condition cinématique à la surface libre suivante :

une particule à surface libre est advectée à la vitesse du fluide.

On impose une condition de non pénétration à la frontière mouillée ($\mathbf{fm}$) : $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{fm}} = 0$ où $\mathbf{n}_{\mathbf{fm}}$ est le vecteur normal unitaire sortant à la frontière mouillée (c.f. FIG. 1.5). On suppose également que la pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique qu'on suppose nulle dans la suite.

On définit le domaine fluide $\Omega_F(t)$ au temps t comme la réunion des sections, $\Omega(t, x)$, supposées connexes, orthogonales à une courbe plane $\mathcal{C}$ du plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{k})$. On choisit alors la représentation paramétrique $(x, 0, b(x))$ dans $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ où $\mathbf{k}$ est l'axe vertical, $b(x)$ est la cote du point $\omega(x, 0, b(x))$ dans le plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ (c.f. FIG. 1.4).

À l'aide de

- la variable curvilinéaire :

$$X = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \left(\frac{d b(\xi)}{d \xi} \right)^2} d\xi \quad (1.7)$$

où x_0 est une abscisse quelconque fixée,

- la variable « largeur »

$$Y = y, \quad (1.8)$$

- la **B**-coordonnée

$$Z \quad (1.9)$$

(i.e. la cote suivant le vecteur **B** défini ci-dessous) d'une particule fluide M ,

on définit le repère local d'origine $\omega(x, 0, b(x))$ et de base $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ où **T** est le vecteur tangent unitaire, **N** le vecteur normal et **B** le vecteur binormal à la courbe plane $\mathcal{C}$ au point $\omega(x, 0, b(x))$ (c.f. FIG. 1.4 et FIG. 1.6 pour les notations). Dans le plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{k})$, **B** est normal à la courbe plane $\mathcal{C}$.

Ainsi, pour tout point ω de $\mathcal{C}$, la section d'aire mouillée $\Omega(t, X)$ est définie par l'ensemble :

$$\Omega(t, X) = \{(Y, Z) \in \mathbb{R}^2; Z \in [-R(X), -R(X) + H(t, X)], Y \in [\alpha(X, Z), \beta(X, Z)]\} \quad (1.10)$$

où $R(X)$ est le rayon de la section maximale $S(X) = \pi R^2(X)$ et $H(t, X)$ la hauteur d'eau physique. On note $\alpha(X, Z)$ (respectivement $\beta(X, Z)$) le point de frontière gauche (respectivement droite) du domaine à la cote Z , pour $-R(X) \leq Z \leq R(X)$ (c.f. FIG. 1.6). On suppose également que $\alpha(\cdot, z)$ et $\beta(\cdot, z)$ sont des fonctions à support compact dans $[-R(X), R(X)]$. On note aussi la Z -coordonnée du niveau d'eau par $h(t, X) = -R(X) + H(t, X)$.

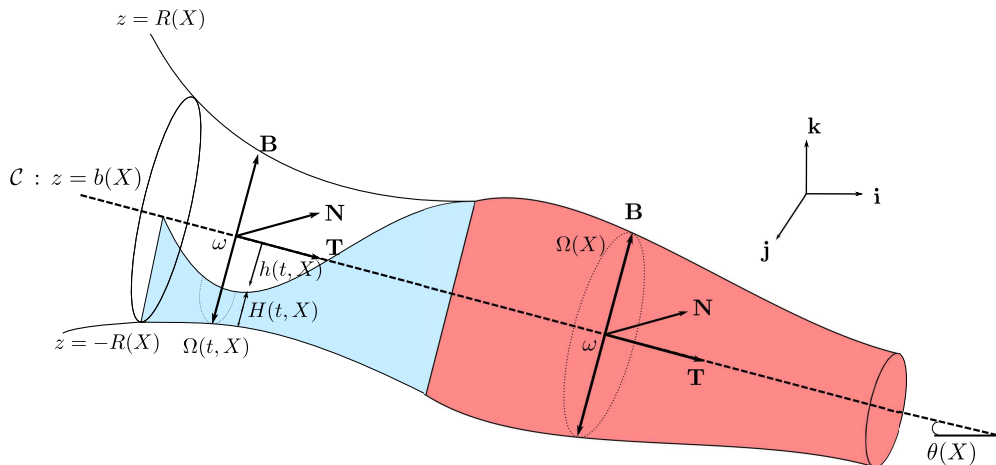


FIGURE 1.4 – Caractéristiques géométriques du domaine
Écoulement mixte en surface libre et en charge

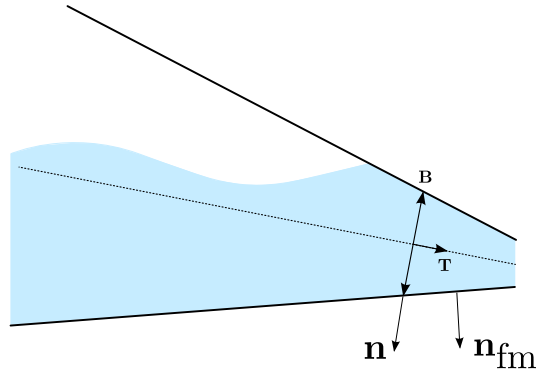


FIGURE 1.5 – Vecteur normal sortant $\mathbf{n}_{\text{fm}} \neq \mathbf{n}$ (sauf pour une conduite uniforme)

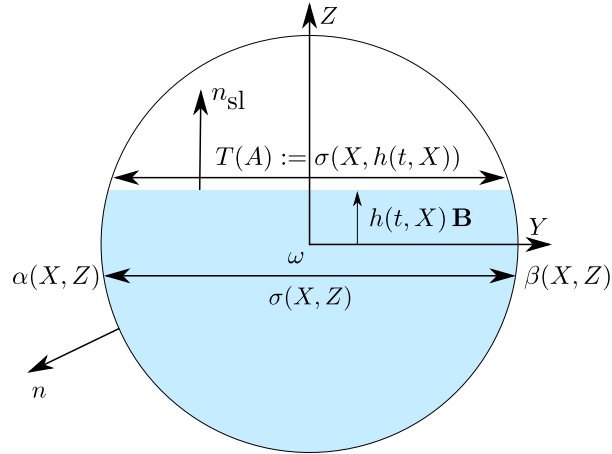


FIGURE 1.6 – Section transversale $\Omega(t, X)$ au point ω en écoulement à surface libre

Pour écrire les équations d'Euler (1.4) en coordonnées (X, Y, Z) , on suppose que :

(H) Soit $\mathcal{R}(x)$ le rayon de courbure au point $\omega(x, 0, b(x))$. Alors, pour tout point x de $\mathcal{C}$, on a :

$$|\mathcal{R}(x)| > R(x).$$

Remarque 1.2.2. Cette condition, de nature géométrique, est nécessaire pour assurer que le changement de variable, $\mathcal{T} : (x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$, est un C^1 -difféomorphisme.

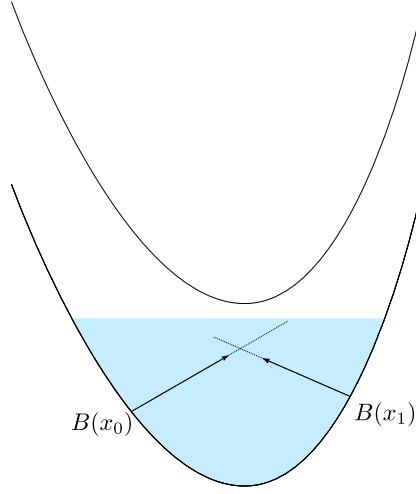


FIGURE 1.7 – Cas de figure interdit par l'hypothèse (H) :
à une particule fluide ne peut être associé qu'un seul point ω

1.2.1 Équations d'Euler incompressibles en coordonnées curvilignes

En se basant sur les travaux de Bouchut *et al.* [12, 13], on décrit le système (1.4) dans le repère local d'origine $\omega(x, 0, b(x))$ et de base $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ par le changement de variable $\mathcal{T} : (x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$ en utilisant la règle de composition de la divergence :

Lemme 1.2.1. Soit $(X, Y, Z) \mapsto \mathcal{T}(X, Y, Z) = (x, y, z)$ un C^1 -difféomorphisme et $\mathcal{A}^{-1} = \nabla_{(X, Y, Z)} \mathcal{T}$ la matrice jacobienne de déterminant J .

Alors, pour tout champ de vecteur Φ , on a :

$$J \operatorname{div}_{(x, y, z)} \Phi = \operatorname{div}_{(X, Y, Z)} (J \mathcal{A} \Phi),$$

et, pour toute fonction scalaire f :

$$\nabla_{(x, y, z)} f = \mathcal{A}^t \nabla_{(X, Y, Z)} f,$$

où $\mathcal{A}^t$ est la matrice transposée de $\mathcal{A}$.

Soit $(U, V, W)^t$ les composantes du champ de vitesse en variables (X, Y, Z) ,

$$(U, V, W)^t = \Theta(u, v, w)^t$$

où Θ est la matrice de rotation autour de l'axe engendrée par $\mathbf{j}$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1.2.1.1 Équation de la divergence

Un point $M(x, y, z)$ tel que :

$$M(x, y, z) = (x - Z \sin \theta(x), y, x + Z \cos \theta(x)) \quad (1.11)$$

dans la base $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ a pour coordonnées (X, Y, Z) dans la base $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ d'origine ω et la matrice $\mathcal{A}^{-1}$ du Lemme 1.2.1 a pour expression :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{dx}{dX} - Z \frac{d\theta}{dX} \cos \theta(X) & 0 & \sin \theta(X) \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{db}{dX} - Z \frac{d\theta}{dX} \sin \theta(X) & 0 & \cos \theta(X) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ J \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$\frac{dx}{dX} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{db}{dx}(x(X, Y, Z)) \right)^2}} = \cos \theta(X), \quad \frac{db(X)}{dX} = \sin \theta(X),$$

et

$$J(X, Y, Z) := \det(\mathcal{A}^{-1}) = 1 - Z \frac{d\theta(X)}{dX}$$

avec $J(X, Y, Z) = J(X, Z)$.

$\mathcal{R}(X)$ est la courbure algébrique au point ω et on utilise la relation :

$$\frac{d\theta(X)}{dX} = \frac{1}{\mathcal{R}(X)} \quad (1.12)$$

Il vient alors,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -J \sin \theta & 0 & J \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

et par le Lemme (1.2.1), l'équation de la divergence en variables (X, Y, Z) s'écrit,

$$J \operatorname{div}_{x,y,z}(\mathbf{U}) = \operatorname{div}_{X,Y,Z} \begin{pmatrix} U \\ JV \\ JW \end{pmatrix} = 0,$$

i.e.

$$\partial_X U + \partial_Y (JU) + \partial_Z (JW) = 0. \quad (1.14)$$

Remarque 1.2.3. L'application qui à (x, y, z) associe $M(x, y, z)$ est un C^1 -difféomorphisme puisque $J(X, Z) > 0$ d'après l'hypothèse (H).

1.2.1.2 Équations de la conservation de la quantité de mouvement

De nouveau, en appliquant le Lemme 1.2.1 à l'équation de convection $\frac{df}{dt}$ de vitesse $\mathbf{U}$ à divergence nulle, où f est une fonction scalaire, on obtient l'identité suivante :

$$J(\partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla)f = J\left(\partial_t f + \operatorname{div}(f\mathbf{U})\right) = J \operatorname{div}_{t,x,y,z} \begin{pmatrix} Jf \\ J\mathcal{A}^{-1}f\mathbf{U} \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{A}^{-1}$ est la matrice inverse de $\mathcal{A}$ donnée par (1.13). On a ainsi :

$$J(\partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla) f = \partial_t(Jf) + \partial_X(fU) + \partial_Y(JfV) + \partial_Z(JfW) \quad (1.15)$$

Les équations de la conservation de quantité de mouvement en variables (X, Y, Z) sont alors le résultat de la multiplication des équations de la quantité de mouvement (1.4) à gauche par la matrice $J\Theta$, où le terme source de gravité est réécrit sous la forme $\mathbf{F} = -\nabla(\mathbf{g} \cdot M)$ (pour un point M défini par (1.11)) :

$$\begin{aligned} 0 &= J\Theta(\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \operatorname{div}(P/\rho_0) + \nabla(\mathbf{g} \cdot M)) \\ &= J\left(\partial_t(\Theta \mathbf{U}) + (\Theta \mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + J\Theta \operatorname{div}(P/\rho_0) + J\Theta \nabla(\mathbf{g} \cdot M)\right) \\ &= J \underbrace{\left(\partial_t \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbf{U} \cdot \nabla u) \cos \theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla w) \sin \theta \\ \mathbf{U} \cdot \nabla v \\ -(\mathbf{U} \cdot \nabla u) \sin \theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla w) \cos \theta \end{pmatrix}\right)}_{(a)} \\ &\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} J \operatorname{div}(\psi \mathbf{i}) \cos \theta + J \operatorname{div}(\psi \mathbf{k}) \sin \theta \\ J \operatorname{div}(\psi \mathbf{j}) \\ -J \operatorname{div}(\psi \mathbf{i}) \sin \theta + J \operatorname{div}(\psi \mathbf{k}) \cos \theta \end{pmatrix}}_{(b)} \end{aligned}$$

où $\psi := (p + g(b + Z \cos \theta))/\rho_0$.

On procède alors en deux étapes :

Calcul du terme (a).

On a :

$$\begin{aligned} &J \begin{pmatrix} \partial_t U + (\mathbf{U} \cdot \nabla u) \cos \theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla w) \sin \theta \\ \partial_t V + \mathbf{U} \cdot \nabla v \\ \partial_t W + -(\mathbf{U} \cdot \nabla u) \sin \theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla w) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= J \begin{pmatrix} \partial_t U + \mathbf{U} \cdot \nabla U - W \mathbf{U} \cdot \nabla \theta \\ \partial_t V + \mathbf{U} \cdot \nabla V \\ \partial_t W + \mathbf{U} \cdot \nabla W + U \mathbf{U} \cdot \nabla \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

En appliquant successivement l'identité (1.15) avec $f = U, V, W$, on aboutit à l'équation :

$$\partial_t \begin{pmatrix} JU \\ JV \\ JW \end{pmatrix} + \operatorname{div}_{X,Y,Z} \left(\begin{pmatrix} U \\ JV \\ JW \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} U \\ JV \\ JW \end{pmatrix} \right) - \mathbf{i} U W \frac{d\theta}{dX} + \mathbf{k} U^2 \frac{d\theta}{dX}. \quad (1.17)$$

Calcul du terme (b).

En appliquant de nouveau le Lemme (1.2.1), on démontre que les trois identités suivantes sont satisfaites pour toute fonction scalaire ψ :

$$\begin{cases} J \operatorname{div}(\psi \mathbf{i}) &= \operatorname{div}_{X,Y,Z} \begin{pmatrix} \psi \cos \theta \\ 0 \\ -J\psi \sin \theta \end{pmatrix}, \\ J \operatorname{div}(\psi \mathbf{j}) &= \partial_Y(J\psi), \\ J \operatorname{div}(\psi \mathbf{k}) &= \operatorname{div}_{X,Y,Z} \begin{pmatrix} \psi \sin \theta \\ 0 \\ J\psi \cos \theta \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1.18)$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \partial_X(\psi \cos \theta) \cos \theta + \partial_X(\psi \sin \theta) \sin \theta &= \partial_X \psi, \\ \partial_Z(J\psi \cos \theta) \sin \theta - \partial_Z(J\psi \sin \theta) \cos \theta &= 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

et

$$\begin{cases} \partial_X(\psi \sin \theta) \cos \theta - \partial_X(\psi \cos \theta) \sin \theta &= \psi \partial_X \theta, \\ \partial_Z(J\psi \cos \theta) \cos \theta + \partial_Z(J\psi \sin \theta) \sin \theta &= \partial_Z(\psi J). \end{cases} \quad (1.20)$$

Compte tenu des égalités (1.18)–(1.20) appliquées à $\psi := (p + g(b + Z \cos \theta))/\rho_0$, le terme (b) prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \partial_X(\psi) \\ \partial_Y(J\psi) \\ \psi \partial_X \theta + \partial_Z(J\psi) \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Finalement, via les résultats (1.17) et (1.21), les équations d'Euler 3D incompressibles en variables (X, Y, Z) ont pour expression :

$$\begin{cases} \partial_X(\rho_0 U) + \partial_Y(J\rho_0 V) + \partial_Z(J\rho_0 W) &= 0, \\ \partial_t(J\rho_0 U) + \partial_X(\rho_0 U^2) + \partial_Y(J\rho_0 UV) + \partial_Z(J\rho_0 UW) + \partial_X p &= G_1, \\ \partial_t(J\rho_0 V) + \partial_X(\rho_0 UV) + \partial_Y(J\rho_0 V^2) + \partial_Z(J\rho_0 VW) + J\partial_Y(p) &= 0, \\ \partial_t(J\rho_0 W) + \partial_X(\rho_0 UW) + \partial_Y(J\rho_0 VW) + \partial_Z(J\rho_0 W^2) + J\partial_Z(p) &= G_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

où

$$G_1 = \rho_0 UW \frac{d\theta}{dX} - g\rho_0 J \sin \theta, \quad G_2 = -\rho_0 U^2 \frac{d\theta}{dX} - Jg\rho_0 \cos \theta. \quad (1.23)$$

La condition de non pénétration en variables (X, Y, Z) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_{\text{fm}} = 0 \quad (1.24)$$

$$\text{où } \mathbf{n}_{\text{fm}} = \frac{1}{\cos \theta(X)} \begin{pmatrix} -\sin \theta(X) \\ 0 \\ \cos \theta(X) \end{pmatrix}.$$

La condition de pression nulle à la surface libre est :

$$p(t, X, Y, Z = h(t, X)) = 0. \quad (1.25)$$

1.2.2 Le modèle à surface libre

En partant des équations d'Euler incompressibles en variables (X, Y, Z) , introduites pour décrire les effets engendrés par les variations de pente et de section, on dérive les équations de Saint-Venant pour un écoulement en conduite fermée (ou canal). On procède par une analyse asymptotique formelle en « couche mince » telle qu'elle a été introduite pour obtenir un Saint-Venant visqueux mono-dimensionnel par Gerbeau *et al* [54], puis étendue au cas bidimensionnel par Marche [79]. On peut toujours, au moins formellement, quitte à prendre une viscosité nulle dans les équations de Gerbeau *et al* [54] ou Marche [79], considérer les équations d'Euler comme équations de base pour la dérivation des équations de Saint-Venant.

1.2.2.1 Analyse asymptotique formelle

Dans cette section, on écrit la version adimensionnelle des équations (1.22) en fonction d'un paramètre d'échelle ε pour effectuer une analyse asymptotique formelle en « couche mince ». En particulier, on s'intéresse à une approximation du système à l'ordre principal ; dans ces conditions, le jacobien J du changement de variable vaut simplement 1.

À cet effet, soit $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{L}{H} = \frac{L}{l}$, l'*aspect ratio* du domaine, supposé « grand ». H , L , resp. l , est une longueur caractéristique de hauteur, de longueur, resp. de largeur (pour simplifier, on pose $l = H$). Au même titre, on suppose que le rapport des échelles caractéristiques des mouvements horizontaux et verticaux à l'axe d'écoulement est égal à ε . Autrement dit, soit $\overline{U}$ une vitesse caractéristique de direction l'axe d'écoulement et $(\overline{V}, \overline{W})$ des vitesses caractéristiques de direction normale et binormale au flot. On pose :

$$\epsilon = \frac{\overline{V}}{\overline{U}} = \frac{\overline{W}}{\overline{U}}.$$

Soit T et P , le temps et une pression caractéristique tel que

$$\overline{U} = \frac{L}{T}, \quad P = \rho_0 \overline{U}^2.$$

On adimensionalise par :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{U}{\overline{U}}, \quad \tilde{V} = \varepsilon \frac{V}{\overline{U}}, \quad \tilde{W} = \varepsilon \frac{W}{\overline{U}}, \\ \tilde{X} &= \frac{X}{L}, \quad \tilde{Y} = \frac{Y}{H}, \quad \tilde{Z} = \frac{Z}{H}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{P}, \quad \tilde{\theta} = \theta \end{aligned}$$

où les quantités surmontées d'un « tilde » sont les variables sans dimension.

Alors, le jacobien s'écrit en fonction de ces variables :

$$\tilde{J}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = 1 - \varepsilon \tilde{Z} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{X}}.$$

Remarque 1.2.4. Bien que l'analyse qui suit soit formelle, en vertu de l'hypothèse (H) et de $-R(X) \leq Z \leq R(X)$, $\tilde{Z} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{X}}$ est borné.

Le système (1.22) sous forme adimensionnelle est donné par :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_{\tilde{X}} \tilde{U} + \partial_{\tilde{Y}} (\tilde{J} \tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}} (\tilde{J} \tilde{W}) &= 0 \\ \partial_{\tilde{t}} (\tilde{J} \tilde{U}) + \partial_{\tilde{X}} (\tilde{U}^2) + \partial_{\tilde{Y}} (\tilde{J} \tilde{U} \tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}} (\tilde{J} \tilde{U} \tilde{W}) + \partial_{\tilde{X}} \tilde{p} &= G_1, \\ \varepsilon^2 \left(\partial_{\tilde{t}} (\tilde{J} \tilde{V}) + \partial_{\tilde{X}} (\tilde{U} \tilde{V}) + \partial_{\tilde{Y}} (\tilde{J} \tilde{V}^2) + \partial_{\tilde{Z}} (\tilde{J} \tilde{V} \tilde{W}) \right) + \partial_{\tilde{Y}} (\tilde{J} \tilde{p}) &= 0, \\ \varepsilon^2 \left(\partial_{\tilde{t}} (\tilde{J} \tilde{W}) + \partial_{\tilde{X}} (\tilde{U} \tilde{W}) + \partial_{\tilde{Y}} (\tilde{J} \tilde{V} \tilde{W}) + \partial_{\tilde{Z}} (\tilde{J} \tilde{W}^2) \right) + \tilde{J} \partial_{\tilde{Z}} (\tilde{p}) &= G_2 \end{aligned} \right. \quad (1.26)$$

où

$$\begin{aligned} G_1 &= \varepsilon \tilde{U} \tilde{W} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{X}} - \frac{\sin \tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,L}^2} - \frac{\tilde{Z}}{F_{r,H}^2} \frac{d}{d\tilde{X}} \cos \tilde{\theta}(\tilde{X}), \\ G_2 &= -\varepsilon \tilde{U}^2 \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{X}} - \frac{\cos \tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,H}^2} + \varepsilon \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{X}} \frac{\tilde{Z} \tilde{J} \cos \tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,H}^2}, \end{aligned}$$

$F_{r,\chi} = \frac{\bar{U}}{\sqrt{g\chi}}$ est le nombre de Froude suivant l'axe **T**, **B** ou **N** avec $\chi = L$ ou $\chi = H$.

Formellement, si ε tend vers 0, le système précédent (1.26) est réduit aux équations suivantes :

$$\partial_{\tilde{X}}\tilde{U} + \partial_{\tilde{Y}}\tilde{V} + \partial_{\tilde{Z}}\tilde{W} = 0, \quad (1.27)$$

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{U} + \partial_{\tilde{X}}(\tilde{U}^2) + \partial_{\tilde{Y}}(\tilde{U}\tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}}(\tilde{U}\tilde{W}) + \partial_{\tilde{X}}\tilde{p} = -\frac{\sin\tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,L}^2} - \frac{\tilde{Z}}{F_{r,H}^2} \frac{d}{d\tilde{X}} \cos\tilde{\theta}(\tilde{X}), \quad (1.28)$$

$$\partial_{\tilde{Y}}\tilde{p} = 0, \quad (1.29)$$

$$\partial_{\tilde{Z}}\tilde{p} = -\frac{\cos\tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,H}^2}. \quad (1.30)$$

⚠ On note désormais (x, y, z) les variables dimensionnelles (X, Y, Z) (c.f. (1.7)–(1.9)) et (u, v, w) les vitesses dimensionnelles (U, V, W) . En particulier, on pose :

$$x = L\tilde{X}, y = H\tilde{Y}, z = H\tilde{Z}$$

et

$$u = \bar{U}\tilde{U}, v = \epsilon\bar{U}\tilde{V}, w = \epsilon\bar{U}\tilde{W} \text{ et } p = \rho_0\bar{U}^2\tilde{p}.$$

Alors, en multipliant l'équation :

- (1.27) par $\rho_0 \frac{\bar{U}}{L}$,
- (1.28) par $\rho_0 \frac{\bar{U}}{T}$,
- (1.29) par $\rho_0 \frac{\bar{U}}{H}$,
- (1.30) par $\rho_0 \frac{\bar{U}}{H}$

on aboutit à l'approximation hydrostatique des équations d'Euler (1.22) en variables (x, y, z) (c.f. (1.7)–(1.9)) :

$$\partial_x(\rho_0 u) + \partial_y(\rho_0 v) + \partial_z(\rho_0 w) = 0, \quad (1.31)$$

$$\partial_t(\rho_0 u) + \partial_x(\rho_0 u^2) + \partial_y(\rho_0 uv) + \partial_z(\rho_0 uw) + \partial_x p = -g\rho_0 \sin\theta(x) - g\rho_0 z \frac{d}{dx} \cos\theta(x), \quad (1.32)$$

$$\partial_y p = 0, \quad (1.33)$$

$$\partial_z p = -g \cos\theta(x). \quad (1.34)$$

1.2.2.2 Moyennisation des équations d'Euler (1.31)–(1.34)

Soit $A(t, x)$ et $Q(t, x)$ les variables conservatives représentant respectivement l'aire mouillée et le débit. A et Q sont définis comme suit :

$$A(t, x) = \int_{\Omega(t, x)} dydz \quad (1.35)$$

et

$$Q(t, x) = A(t, x)\bar{u}(t, x) \quad (1.36)$$

avec

$$\bar{u}(t, x) = \frac{1}{A(t, x)} \int_{\Omega(t, x)} u(t, x, y, z) dydz \quad (1.37)$$

la vitesse moyenne du fluide suivant la section $\Omega(t, x)$.

Dans le paragraphe suivant, on établit la condition d'advection à la surface libre nécessaire à l'intégration des équations de conservation de la quantité de mouvement (1.22) le long des sections $\Omega(t, x)$.

Condition cinématique à la surface libre et équation de conservation de la masse.

Si on note $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, en intégrant l'équation de la conservation de la masse (1.6) sur l'ensemble

$$\overline{\Omega}(x) = \{(y, z); \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z), -R(x) \leq y \leq \infty\},$$

on obtient l'équation suivante :

$$\int_{\overline{\Omega}(x)} \partial_t(\rho_0 \phi) + \partial_x(\rho_0 \phi u) + \operatorname{div}_{y,z}(\rho_0 \phi \mathbf{V}) dydz = \rho_0 \left(\partial_t A + \partial_x Q + \int_{\partial \overline{\Omega}_{\text{fm}}(x)} (u \partial_x M - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \right) \quad (1.38)$$

où A et Q sont données par (1.35) et (1.36).

D'après la définition (1.5) de la fonction indicatrice ϕ , la frontière de $\overline{\Omega}_{\text{fm}}$ coïncide avec la frontière mouillée γ_{fm} . En utilisant la condition de non pénétration (1.24), l'expression (1.38) est équivalente à l'équation

$$\partial_t(\rho_0 A) + \partial_x(\rho_0 Q) = 0 \quad (1.39)$$

D'autre part, si on intègre l'équation (1.6) sur $\Omega(t, x)$, on obtient :

$$\rho_0 \left(\int_{-R(x)}^{h(t,x)} \partial_t \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} dydz + \partial_x Q + \int_{\partial \Omega(t,x)} (\mathbf{V} - u \partial_x M) \cdot \mathbf{n} ds \right) = 0 \quad (1.40)$$

où

$$\int_{-R(x)}^{h(t,x)} \partial_t \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} dydz = \partial_t A - \sigma(x, h(t, x)) \partial_t h$$

avec $\sigma(x, h(t, x))$ la largeur au miroir (c.f. FIG. 1.6).

Compte tenu de la condition de non pénétration (1.24), l'intégrale sur la frontière mouillée est nulle, i.e. :

$$\int_{\gamma_{\text{fm}}(t,x)} (\mathbf{V} - u \partial_x M) \cdot \mathbf{n}_{\text{fm}} ds = 0.$$

On obtient alors :

$$\partial_t(\rho_0 A) + \partial_x(\rho_0 Q) + \rho_0 \int_{\gamma_{\text{sl}}(t,x)} (\partial_t M + u \partial_x M - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{\text{sl}} ds = 0. \quad (1.41)$$

En identifiant les équations (1.39) et (1.41), on aboutit à la condition cinématique à la surface libre :

$$\int_{\gamma_{\text{sl}}(t,x)} (\partial_t M + u \partial_x M - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{\text{sl}} ds = 0. \quad (1.42)$$

L'équation de conservation de la masse (1.41) s'écrit alors :

$$\partial_t(\rho_0 A) + \partial_x(\rho_0 Q) = 0. \quad (1.43)$$

Remarque 1.2.5 (Lien avec l'équation d'advection à la surface libre usuelle). À la surface libre, un point M (i.e $M \in \gamma_{sl}$) a pour coordonnée $(x, y, h(t, x))$ et la normale $\mathbf{n}_{sl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le plan $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$ (c.f. FIG. 1.6). Donc, en notant la moyenne de u et w le long du chemin $\alpha(x, h(t, x)) \leq y \leq \beta(x, h(t, x))$ par $\overline{u}_{z=h(t,x)}^y$ et $\overline{w}_{z=h(t,x)}^y$ données par les intégrales :

$$\overline{u}_{z=h(t,x)}^y = \frac{1}{\sigma(x, h(t, x))} \int_{\alpha(x, h(t, x))}^{\beta(x, h(t, x))} u_{z=h(t, x)} dy$$

et

$$\overline{w}_{z=h(t,x)}^y = \frac{1}{\sigma(x, h(t, x))} \int_{\alpha(x, h(t, x))}^{\beta(x, h(t, x))} w_{z=h(t, x)} dy$$

alors l'intégrale curviligne se réécrit :

$$\int_{\partial\gamma_{sl}(t,x)} (\partial_t M + u \partial_x M - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_{sl} ds = \sigma(x, h(t, x)) \left(\partial_t h + \overline{u}_{z=h(t,x)}^y \partial_x h - \overline{w}_{z=h(t,x)}^y \right).$$

On a donc l'équation

$$\partial_t h + \overline{u}_{z=h(t,x)}^y \partial_x h - \overline{w}_{z=h(t,x)}^y = 0. \quad (1.44)$$

En particulier, lorsque u est indépendant de y , on obtient la formulation usuelle de l'équation d'advection à la surface libre :

$$\partial_t h + u_{z=h(t,x)} \partial_x h - w_{z=h(t,x)} = 0.$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement.

Les différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.32) sont intégrés suivant une section $\Omega(t, x)$ comme suit :

$$\int_{\Omega} \underbrace{\partial_t(\rho_0 u)}_{a_1} + \underbrace{\partial_x(\rho_0 u^2)}_{a_2} + \underbrace{\text{div}_{y,z}(\rho_0 u \mathbf{V})}_{a_3} + \underbrace{\partial_x p}_{a_4} dydz = \int_{\Omega} \underbrace{-\rho_0 g z \frac{d}{dx} \cos \theta}_{a_5} - \underbrace{\rho_0 g \sin \theta}_{a_6} dydz$$

où $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$.

En supposant que

$$\overline{uv} \approx \overline{u} \overline{v}, \quad \overline{u^2} \approx \overline{u}^2,$$

on a successivement :

Calcul du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_1 dydz$.

Seule l'intégrale de bord à la surface libre apporte une information puisque, la conduite est supposé non-dilatable, le terme sur la frontière mouillée est nulle :

$$\int_{\gamma_{fm}(t,x)} \rho_0 u \partial_t M \cdot \mathbf{n}_{sl} ds = 0.$$

On a donc :

$$\int_{\Omega(t,x)} \partial_t(\rho_0 u) dydz = \partial_t \int_{\Omega(t,x)} \rho_0 u dydz - \int_{\gamma_{sl}(t,x)} \rho_0 u \partial_t M \cdot \mathbf{n}_{sl} ds.$$

Calcul du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_2 dydz$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t,x)} \partial_x(\rho_0 u^2) dydz &= \partial_x \int_{\Omega(t,x)} \rho_0 u^2 dydz - \int_{\gamma_{sl}(t,x)} \rho_0 u^2 \partial_x M \cdot \mathbf{n}_{sl} ds \\ &\quad - \int_{\gamma_{fm}(t,x)} \rho_0 u^2 \partial_x M \cdot \mathbf{n}_{fm} ds. \end{aligned}$$

Calcul du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_3 dydz$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t,x)} \operatorname{div}_{y,z}(\rho_0 u \mathbf{V}) dydz &= \int_{\gamma_{sl}(t,X)} \rho_0 u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{sl} ds \\ &\quad + \int_{\gamma_{fm}(t,X)} \rho_0 u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{fm} ds. \end{aligned}$$

En sommant $a_1 + a_2 + a_3$, on obtient d'une part l'intégrale de bord sur la frontière mouillée qui disparaît grâce à la condition de non pénétration (1.24), et d'autre part l'intégrale de bord à la surface libre qui est nulle via la condition à la surface libre (1.42). Il en résulte l'expression suivante :

$$\int_{\Omega(t,x)} a_1 + a_2 + a_3 dydz = \partial_t(\rho_0 Q) + \partial_x \left(\rho_0 \frac{Q^2}{A} \right) \quad (1.45)$$

où A et Q sont données par (1.35) et (1.36) respectivement.

Calcul du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_4 dydz$.

Avant de commencer le calcul du terme a_4 , on montre que la pression est hydrostatique :

$$p(t, x, z) = \rho_0 g(h(t, x) - z) \cos \theta(x). \quad (1.46)$$

En effet, d'une part, la pression ne dépend pas de la variable y d'après l'équation (1.33). D'autre part, en intégrant l'équation (1.34) de z à $h(t, x)$, on obtient l'équation (1.46).

Pour $\psi = p$, p donné par l'équation (1.46), à (t, x) fixé, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t,x)} \partial_x \psi dydz &= \int_{-R(x)}^{h(t,x)} \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} \partial_x \psi dydz \\ &= \int_{-R(x)}^{h(t,x)} \partial_x \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} \psi dydz \\ &\quad - \left(\int_{-R(x)}^{h(t,x)} \partial_x \beta(x, z) \psi|_{y=\beta(x,z)} - \partial_x \alpha(x, z) \psi|_{y=\alpha(x,z)} dz \right) \\ &= \partial_x \int_{\Omega(t,x)} \psi dydz \\ &\quad - \left(\int_{-R(x)}^{h(t,x)} \partial_x \beta(x, z) \psi|_{y=\beta(x,z)} - \partial_x \alpha(x, z) \psi|_{y=\alpha(x,z)} dz \right) \\ &\quad - \partial_x h(t, x) \int_{\alpha|_{z=h(t,x)}}^{\beta|_{z=h(t,x)}} \psi|_{z=h(t,x)} dy \\ &\quad - \partial_x R(x) \int_{\alpha|_{z=h(t,x)}}^{\beta|_{z=h(t,x)}} \psi|_{z=-R(x)} dy. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t,x)} \partial_x p \, dy \, dz &= \partial_x (\rho_0 g I_1(x, A(t, x)) \cos \theta(x)) - g \rho_0 I_2(x, A) \cos \theta(x) \\ &\quad - \rho_0 g (h(t, x) + R(x)) \cos \theta(x) \sigma(x, -R(x)) \frac{d R(x)}{dx} \end{aligned} \quad (1.47)$$

où σ est la largeur du domaine à la cote z (c.f. FIG. 1.6) donnée par

$$\sigma(x, z) = \beta(x, z) - \alpha(x, z)$$

et I_1 est le terme de pression hydrostatique :

$$I_1(x, A) = \int_{-R(x)}^{h(A)} (h(A) - z) \sigma(x, z) \, dz. \quad (1.48)$$

En particulier, lorsque la conduite est rectangulaire de section uniforme alors $I_1(x, A) := I_1(A)$ et $\sigma(x, z) = \sigma = cte$. De plus, on a $A = (h + R)\sigma = H\sigma$ et

$$\frac{g I_1(A)}{\sigma} = \frac{g I_1(A)}{\sigma} = g \frac{H^2}{2}$$

est la pression hydrostatique usuelle pour les équations de Saint-Venant mono-dimensionnel d'inconnue $(h, q = hu)$. D'autre part, on peut écrire le terme $I_1 = A \bar{y}$ où $\bar{y}$ est la distance entre la surface libre et le centre de gravité de la section mouillée (c.f. FIG. 1.8).

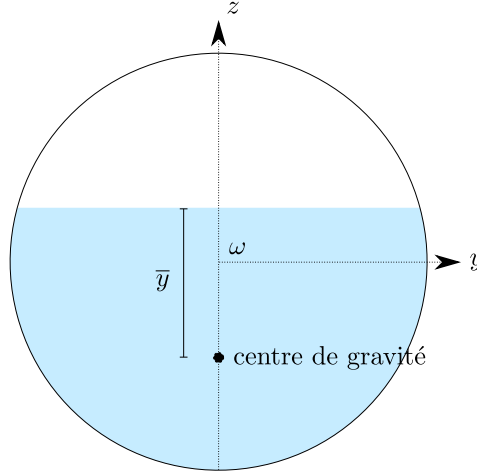


FIGURE 1.8 – Distance entre la surface libre et le centre de gravité de la section mouillée.

Le terme I_2 est le terme source de pression. Il est donné par la formule :

$$I_2(x, A) = \int_{-R(x)}^{h(A)} (h(A) - z) \partial_x \sigma(x, z) \, dz. \quad (1.49)$$

Ce terme n'a d'impact sur l'équation que si $\partial_x \sigma(x, \cdot)$ est non nulle. Autrement dit, c'est le terme source qui prend en compte les variations de section.

Au même titre que I_2 , le terme $\rho_0 g (h(t, x) + R(x)) \cos \theta(x) \sigma(x, -R(x)) \frac{dR(x)}{dx}$ est aussi un terme source qui prend en compte les variations de section. Cependant, il agit sur le système que lorsque la conduite vérifie les propriétés géométriques suivantes :

$$\sigma(x, z = -R(x)) \neq 0, \text{ et} \quad (1.50)$$

$$\partial_x R(x) \neq 0. \quad (1.51)$$

La contribution de ce terme est donc nulle pour une conduite circulaire à section variable (puisque $\sigma(x, -R(x)) = 0$) et pour toute conduite de section uniforme, quelque soit sa géométrie (puisque $\partial_x R(x) = 0$). C'est pourquoi, dans la suite, le résultat du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_4 dydz$ est seulement donné par :

$$\int_{\Omega(t,x)} \partial_x p dydz = \partial_x (\rho_0 g I_1(x, A(t, x)) \cos \theta(x)) - g \rho_0 I_2(x, A) \cos \theta(x) \quad (1.52)$$

Bien que le cas des conduites satisfaisant les conditions (1.50)–(1.51) n'est pas pris en compte, le terme $\rho_0 g (h(t, x) + R(x)) \cos \theta(x) \sigma(x, -R(x)) \frac{dR(x)}{dx}$ peut être traité suivant la méthode utilisée pour les termes analogues, sans difficulté supplémentaire.

Calcul du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_5 dydz$.

On a :

$$\int_{\Omega(t,x)} \rho_0 g z \frac{d}{dx} \cos \theta dydz = \rho_0 g A \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \quad (1.53)$$

où $\bar{z}$ est la z -coordonnée du centre de gravité. Comme $\frac{I_1(x, A(t, x))}{A(t, x)} := \bar{y}$ (voir l'étape « Calcul du terme a_3 . »), la quantité $\bar{z}$ est directement reliée à I_1 par la formule :

$$\bar{z} = h(t, x) - \frac{I_1(x, A(t, x))}{A(t, x)}. \quad (1.54)$$

Il représente donc la distance séparant la surface libre du centre de gravité et $\rho_0 g A \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta$ est le terme de courbure.

Calcul du terme $\int_{\Omega(t,x)} a_6 dydz$.

On a :

$$\int_{\Omega(t,x)} \rho_0 g \sin \theta dydz = \rho_0 g A \sin \theta. \quad (1.55)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est alors obtenue comme le résultat de la somme des calculs effectués (1.45)–(1.55). Finalement, les équations de Saint-Venant, ou les équations à surface libre, pour les écoulements en conduite fermée à section circulaire variable (ou conduite uniforme non nécessairement à section circulaire) sont données par :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_0 A) + \partial_x(\rho_0 Q) & = 0 \\ \partial_t(\rho_0 Q) + \partial_x \left(\rho_0 \frac{Q^2}{A} + g \rho_0 I_1 \cos \theta \right) & = -g \rho_0 A \sin \theta + g \rho_0 I_2 \cos \theta - g \rho_0 A \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \end{cases} \quad (1.56)$$

On peut éventuellement ajouter un terme de frottement $-\rho_0 g S_f \mathbf{T}$ pour prendre en compte la dissipation de l'énergie. On prend par exemple la formule de Manning-Strickler (voir [98]) :

$$S_f(A, U) = K(A)U|U|$$

où $K(A)$ est défini par :

$$K(A) = \frac{1}{K_s^2 R_h(A)^{4/3}}.$$

$K_s > 0$ est le coefficient de Strickler, dépendant du matériau, et $R_h(A) = A/P_m(A)$ est le rayon hydraulique. P_m désigne le périmètre mouillé (longueur de la partie de la frontière en contact avec l'eau).

1.3 Dérivation formelle des équations en charge

On présente la dérivation des équations en charge en suivant la même procédure que les équations à surface libre (1.56) tout en gardant à l'esprit qu'on veut construire un modèle mixte qui puisse à la fois

- modéliser les écoulements à surface libre,
- modéliser les écoulements en charge (lorsque la conduite est totalement pleine),
- modéliser les phénomènes de transition (suivi du point de l'interface séparant les deux types d'écoulement),

comme pour la technique de la fente de Preissman [39, 40, 98, 34, 98] mais en tenant compte de :

- la compressibilité de l'eau,
- des ondes de surpression et dépression,
- des coup de bélier

comme dans les équations d'Allievi.

Notre objectif est donc de construire des équations en charge dont la formulation est « proche » du modèle à surface libre (1.56) en tenant compte de la physique d'un écoulement en charge, i.e. la compressibilité de l'eau.

On prend comme point de départ les équations d'Euler compressibles 3D isentropes. Ces équations sont :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (1.57)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{U}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p(\rho) = \rho \mathbf{F}, \quad (1.58)$$

où $\mathbf{U}(t, x, y, z)$ représente la vitesse du fluide de composantes (u, v, w) et $\rho(t, x, y, z)$ est la masse

volumique du fluide. Le terme source de gravité est donnée par $\mathbf{F} = -g \begin{pmatrix} -\sin \theta(x) \\ 0 \\ \cos \theta(x) \end{pmatrix}$ où $\theta(x)$

est l'angle $(\mathbf{i}, \mathbf{T})$ (c.f. FIG. 1.4 ou FIG. 1.5). $\mathbf{T}$ est le vecteur unitaire tangent au point ω (voir Section 1.2 pour les notations).

On choisit pour l'équation d'état une loi de pression linéarisée (voir, par exemple, [98, 108]) sous la forme :

$$p = p_a + \frac{\rho - \rho_0}{\beta_0 \rho_0}. \quad (1.59)$$

Cette formulation présente l'avantage de modéliser clairement les phénomènes de surpression et dépression. ρ_0 étant la masse volumique du fluide, la surpression correspond au régime $\rho > \rho_0$ tandis que la dépression correspond à $\rho < \rho_0$. Le régime $\rho = \rho_0$ est l'état limite entre la surpression et la dépression.

À la frontière (mouillée) on impose une loi de non pénétration et on supposera que la conduite est non dilatable.

Dans (1.59), on définit la vitesse du son en charge par $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \beta_0}$ où β_0 est le coefficient de compressibilité de l'eau. En pratique, β_0 est égale à $5.0 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ et donc $c \approx 1400 \text{ m}^2/\text{s}$. Le terme p_a est généralement égale à la pression atmosphérique p_0 . Sans perte de généralité, on peut supposer que p_a est nul. Cependant, on reviendra sur ce terme dans la Section 1.4 où il joue un rôle important dans la modélisation des équations mixtes **PFS**.

Si $(x, 0, b_{\text{sl}}(x))$ désigne la représentation paramétrique de la courbe plane $\mathcal{C}_{\text{sl}}$ pour les écoulements à surface libre, alors on définit par prolongement continu la représentation paramétrique $(x, 0, b(x))$ de la courbe plane $\mathcal{C}_{\text{ch}}$ pour les écoulements en charge. (1.60)

Par conséquent la section $\Omega(x)$ (en charge) orthogonale à la courbe plane $\mathcal{C}_{\text{ch}}$ est aussi le prolongement continu de la section $\Omega(t, x)$ (à surface libre) orthogonale à la courbe plane $\mathcal{C}_{\text{sl}}$. On la note désormais $\mathcal{C}$. On définit une section en charge au point ω de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne X (voir (1.7)–(1.9)) :

$$\Omega(X) = \{(Y, Z) \in \mathbb{R}^2; Z \in [-R(X), R(X)], Y \in [\alpha(X, Z), \beta(X, Z)]\}.$$

Remarque 1.3.1. Comme on ne prend pas en compte la dilatabilité de la conduite, les sections en charge $\Omega(x)$ ne dépendent que de la variable spatiale x . Cependant, la dilatabilité peut être prise en compte dans le modèle en ajoutant une loi d'élasticité (voir, par exemple, [16, 19]).

Dans la suite, tout comme dans la Section 1.2, on procède au changement de variable $\mathcal{T} : (x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$.

1.3.1 Équations d'Euler compressibles en coordonnées curviligne

Soit $(U, V, W)^t$ les composantes du champ de vitesse en variables (X, Y, Z) définis par

$$(U, V, W)^t = \Theta(u, v, w)^t$$

où Θ est la matrice de rotation autour de l'axe engendrée par $\mathbf{j}$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1.3.1.1 Équation de conservation de la masse

En écrivant l'équation de conservation de la masse (1.57) sous forme de divergence :

$$\text{div}_{t,x,y,z} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{U} \end{pmatrix} = 0$$

et en appliquant le Lemme 1.2.1, on obtient les équations en variables (X, Y, Z) :

$$\partial_t(J\rho) + \partial_X(\rho U) + \partial_Y(J\rho V) + \partial_Z(J\rho W) = 0 \quad (1.61)$$

où J est le déterminant de la matrice $\mathcal{A}^{-1}$ (c.f. 1.35).

Remarque 1.3.2. Rappelons que d'après (H), on a $J(X, Z) > 0$.

1.3.1.2 Équation de la conservation de la quantité de mouvement

En suivant la procédure de la section 1.2.1, à savoir :

- en appliquant le Lemme 1.2.1,
- en multipliant les équations de la conservation de la quantité de mouvement du système (1.58) à gauche par la matrice $J\Theta$ avec F réécrit sous la forme $\mathbf{F} = -g\nabla(\mathbf{g} \cdot M)$ où M est défini par (1.11),

on aboutit aux équations en variables (X, Y, Z) dont l'équation pour U devient :

$$\partial_t(\rho JU) + \partial_X(\rho U^2) + \partial_Y(\rho JUV^2) + \partial_Z(\rho JUW) + \partial_X p = -\rho Jg \sin \theta(X) + \rho UW \frac{d}{dX} \cos \theta(X). \quad (1.62)$$

Contrairement à la dérivation des équations à surface libre (voir Section 1.2.1.2), on considère seulement l'équation sur U (1.62). En effet, dans la dérivation des équations à surface libre, l'équation hydrostatique est nécessaire pour éliminer une inconnue, à savoir la pression p . Comme on souhaite obtenir un écoulement unidirectionnel en charge et que la pression p est connue si ρ l'est, l'équation hydrostatique n'apporte rien et c'est pour cette raison que les deux autres équations ne sont pas prises en compte. On reviendra sur ce point en fin de Section 1.3.2.2.

1.3.2 Le modèle en charge

Les équations en charge sont obtenues de la même manière que les équations à surface libre (1.56). On adapte l'analyse d'échelle en « couche mince » introduite dans la section 1.2.2.1 aux termes des équations (1.61)-(1.62). Puis, on intègre les équations suivant une section $\Omega(x)$.

1.3.2.1 Analyse asymptotique formelle

Dans cette section, on écrit la version adimensionnelle des équations (1.61)-(1.62) en fonction du paramètre d'échelle ε déjà introduit en Section 1.2.2.1. En particulier, l'approximation du système à l'ordre principal nous donne l'approximation $J \approx 1$ où J est le jacobien de la matrice du changement de variable .

On rappelle que le paramètre d'échelle est tel que

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{L}{H} = \frac{L}{l} = \frac{\bar{U}}{\bar{V}} = \frac{\bar{U}}{\bar{W}}$$

est supposé « grand » où H , L , resp. l est une longueur caractéristique de hauteur, de longueur, resp. de largeur (pour simplifier, on a posé $l = H$) et $\bar{U}$, $\bar{V}$, resp. $\bar{W}$, est une vitesse caractéristique suivant l'axe d'écoulement, suivant la direction normale et binormale à l'axe d'écoulement. Soit T le temps caractéristique tel que

$$\bar{U} = \frac{L}{T}.$$

On adimensionalise :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{U}{\bar{U}}, \quad \tilde{V} = \varepsilon \frac{V}{\bar{U}}, \quad \tilde{W} = \varepsilon \frac{W}{\bar{U}}, \\ \tilde{X} &= \frac{X}{L}, \quad \tilde{Y} = \frac{Y}{H}, \quad \tilde{Z} = \frac{Z}{H}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{\theta} = \theta \end{aligned}$$

où les quantités surmontées d'un « tilde » sont les variables sans dimension.

Avec ces notations, les équations (1.61)-(1.62) adimensionnelles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{J}) + \partial_{\tilde{X}}(\tilde{\rho}\tilde{U}) + \partial_{\tilde{Y}}(\tilde{\rho}\tilde{J}\tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}}(\tilde{\rho}\tilde{J}\tilde{W}) = 0 \\ \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{J}\tilde{U}) + \partial_{\tilde{X}}(\tilde{\rho}\tilde{U}^2) + \partial_{\tilde{Y}}(\tilde{\rho}\tilde{J}\tilde{U}\tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}}(\tilde{\rho}\tilde{J}\tilde{U}\tilde{W}) + \frac{1}{M_a^2}\partial_{\tilde{X}}\tilde{\rho} = \epsilon\tilde{\rho}\tilde{U}\tilde{W}\tilde{\rho}(\tilde{X}) \\ \quad - \tilde{\rho}\frac{\sin\tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,L}^2} \\ \quad - \frac{\tilde{Z}}{F_{r,H}^2}\frac{d}{d\tilde{X}}\cos\tilde{\theta}(\tilde{X}) \end{array} \right. \quad (1.63)$$

où $F_{r,M} = \frac{\bar{U}}{\sqrt{gM}}$ est le nombre de Froude et $M_a = \frac{\bar{U}}{c}$ est le nombre de Mach.

Formellement, lorsque ϵ tend vers 0, les équations (1.63) se réduisent à :

$$\partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}) + \partial_{\tilde{X}}(\tilde{\rho}\tilde{U}) + \partial_{\tilde{Y}}(\tilde{\rho}\tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}}(\tilde{\rho}\tilde{W}) = 0, \quad (1.64)$$

$$\partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}\tilde{U}) + \partial_{\tilde{X}}(\tilde{\rho}\tilde{U}^2) + \partial_{\tilde{Y}}(\tilde{\rho}\tilde{U}\tilde{V}) + \partial_{\tilde{Z}}(\tilde{\rho}\tilde{U}\tilde{W}) + \frac{1}{M_a^2}\partial_{\tilde{X}}\tilde{\rho} = -\tilde{\rho}\frac{\sin\tilde{\theta}(\tilde{X})}{F_{r,L}^2} \quad (1.65)$$

$$-\frac{\tilde{Z}}{F_{r,H}^2}\frac{d}{d\tilde{X}}\cos\tilde{\theta}(\tilde{X}) \quad (1.66)$$

⚠ En notant (x, y, z) les variables dimensionnelles (X, Y, Z) (c.f. (1.7)–(1.9)), (u, v, w) les vitesses dimensionnelles (U, V, W) et en posant :

$$\begin{aligned} x &= L\tilde{X}, \quad y = H\tilde{Y}, \quad z = H\tilde{Z}, \\ u &= \bar{U}\tilde{U}, \quad v = \epsilon\bar{U}\tilde{V}, \quad w = \epsilon\bar{U}\tilde{W}, \end{aligned}$$

$\rho = \rho_0\tilde{\rho}$ la masse volumique dimensionnelle, on aboutit aux équations en variables (x, y, z) :

$$\partial_t\rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) + \partial_z(\rho w) = 0, \quad (1.67)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) + \partial_z(\rho uw) + \partial_x p = -g\rho\sin\theta(x) - g\rho z\frac{d}{dx}\cos\theta(x). \quad (1.68)$$

où p est la pression linéarisée (1.59).

1.3.2.2 Moyennisation des équations d'Euler (1.67)–(1.68)

Soit $S(x)$ la section d'eau (l'air $\Omega(x)$) et $Q(t, x)$ le débit défini comme suit :

$$S(x) = \int_{\Omega(t,x)} dydz, \quad (1.69)$$

$$Q(t, x) = S(x)\bar{u}(t, x) \quad (1.70)$$

où $\bar{u}$ est la vitesse moyenne sur la section $\Omega(x)$:

$$\bar{u}(t, x) = \frac{1}{S(t, x)} \int_{\Omega(t,x)} u(t, x, y, z) dydz. \quad (1.71)$$

Soit $\mathbf{m} \in \partial\Omega(x)$ et $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}$ la normale unitaire sortante à $\partial\Omega(x)$ au point $\mathbf{m}$ dans le Ω -plan.

On note $\mathbf{m}$ le vecteur ωm (c.f. FIG. 1.6). Avec les approximations

$$\overline{\rho u} \approx \bar{\rho}\bar{u}, \quad \overline{\rho u^2} \approx \bar{\rho}\bar{u}^2,$$

les équations (1.67)-(1.68) sont intégrées suivant une section $\Omega(x)$. On obtient alors,

$$\partial_t(\bar{\rho}S) + \partial_x(\bar{\rho}S\bar{u}) = \int_{\partial\Omega(x)} \rho(u\partial_x \mathbf{m} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\bar{\rho}S\bar{u}) + \partial_x(\bar{\rho}S\bar{u}^2 + c^2\bar{\rho}S) &= -g\bar{\rho}S \sin \theta + c^2\bar{\rho}\frac{dS}{dx} - g\bar{\rho}S\bar{z}\frac{d}{dx} \cos \theta, \\ &+ \int_{\partial\Omega(x)} \rho u(u\partial_x \mathbf{m} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (1.73)$$

où $\mathbf{V} = (v, w)^t$ est le vecteur vitesse dans le plan $(\mathbf{N}, \mathbf{B})$. L'intégrale de bord dans l'équation (1.72) et (1.73) est identiquement nulle car :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{fm}} = \partial_t m \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{fm}} = 0.$$

Cette condition provient du fait que la section est non dilatable, donc $\partial_t m = 0$, d'où la condition de non pénétration.

En omettant les « barres » surmontant les quantités moyennées à l'exception de $\bar{z}$, en définissant « l'aire mouillée équivalente », $A(t, x)$, le débit, $Q(t, x)$:

$$A(t, x) = \frac{\rho(t, x)}{\rho_0} S, \quad (1.74)$$

$$Q(t, x) = A(t, x)u(t, x). \quad (1.75)$$

et en ajoutant de part et d'autre de l'équation (1.73) la quantité $c^2 \frac{dS}{dx}$, on obtient les équations en charge :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + c^2(A - S) \right) &= -gA \sin \theta + c^2 \left(\frac{A}{S} - 1 \right) \frac{dS}{dx} - gA\bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta. \end{cases} \quad (1.76)$$

De la même manière que pour le modèle à surface libre (1.56), on peut ajouter un terme de frottement $-\rho g S_f \mathbf{T}$ donné, par exemple, par la loi de Manning-Strickler (voir e.g. [98]) :

$$S_f(S, U) = K(S)U|U|$$

où $K(S)$ est défini par

$$K(S) = \frac{1}{K_s^2 R_h(S)^{4/3}}.$$

$K_s > 0$ est le coefficient de Strickler et $R_h(S) = S/P_m(S)$ est le rayon hydraulique où P_m est le périmètre mouillé ($P_m = P_m(S)$ est le périmètre de la conduite).

Remarque 1.3.3. *Compte tenu de la définition de la quantité équivalente (1.74), la compressibilité de l'eau est prise en compte. Ainsi, une dépression a lieu si $A < S$ (i.e. $\rho < \rho_0$) et une surpression a lieu si $A > S$ (i.e. $\rho > \rho_0$).*

Remarque 1.3.4. *Dans la Section 1.3.1.2, on a volontairement laissé de côté la deuxième et troisième équation pour ne considérer que la première équation de conservation de la quantité de*

mouvement. En fait, on montre que les équations en charge (1.76) et les équations obtenues à partir d'une dérivation complète sont formellement très proches si on suppose les approximations

$$\bar{u}^2 \approx \bar{u} \bar{u}$$

et

$$\overline{\rho u} \approx \bar{\rho} \bar{u}.$$

1. En considérant toutes les équations de la conservation de la quantité de mouvement, on montre que ρ a le profil suivant :

$$\rho(t, x, y, z) = \rho(t, x, z) = \xi(t, x) e^{-g/c^2 z} \quad (1.77)$$

où ξ est une fonction inconnue dépendant seulement de la variable d'espace x .

En effet, l'approximation hydrostatique des équations d'Euler compressibles, obtenue par l'analyse asymptotique formelle de la Section 1.3.2.1, fournit l'équation (1.68) et les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_y \rho = 0, \\ c^2 \partial_z \rho = -g\rho. \end{cases}$$

Ceci prouve (1.77).

2. Si on multiplie l'équation (1.67) et (1.68) par $e^{g/c^2 z}$, en utilisant ρ sous la forme (1.77), et si on effectue le changement de variable vertical en posant $z_1 = 1 - \frac{c^2}{g} e^{-g/c^2 z}$ et $w_1 = e^{-g/c^2 z} w$, alors les équations (1.67) et (1.68) sont équivalentes aux équations suivantes :

$$\partial_t \xi + \partial_x (\xi u) + \partial_y (\xi v) + \partial_{z_1} (\xi w_1) = 0, \quad (1.78)$$

$$\partial_t (\xi u) + \partial_x (\xi u^2) + \partial_y (\xi uv) + \partial_{z_1} (\xi u w_1) + c^2 \partial_x \xi + g \xi \sin \theta + g \xi z_1 \frac{d}{dx} \cos \theta(x) = 0. \quad (1.79)$$

3. Puisque ξ ne dépend que de la coordonnée x , contrairement à la dérivation des équations en charge il suffit de supposer que $\bar{u}^2 \approx \bar{u} \bar{u}$. Si on intègre les équations (1.78) et (1.79) le long de la section

$$\Omega_1(x) = \left\{ (y, z_1) \in \mathbb{R}^2; 1 - \frac{c^2}{g} e^{g/c^2 R(x)} \leq z_1 \leq 1 - \frac{c^2}{g} e^{-g/c^2 R(x)}, \alpha(x, z_1) \leq y \leq \beta(x, z_1) \right\},$$

d'aire $S_1(x) = \int_{1 - \frac{c^2}{g} e^{g/c^2 R(x)}}^{1 - \frac{c^2}{g} e^{-g/c^2 R(x)}} \int_{\alpha(x, z_1)}^{\beta(x, z_1)} dz_1 = \int_{1 - \frac{c^2}{g} e^{g/c^2 R(x)}}^{1 - \frac{c^2}{g} e^{-g/c^2 R(x)}} \sigma(x, z_1) dz_1$ ou encore en effectuant le changement de variable $z_1 \rightarrow z$

$$S_1(x) = \int_{-R(x)}^{R(x)} \frac{c^2}{g} e^{-g/c^2 z} \sigma \left(x, 1 - \frac{c^2}{g} e^{-g/c^2 z} \right) dz,$$

on obtient :

$$\partial_t (\xi S_1) + \partial_x (\xi S_1 \bar{u}) = \xi \int_{\partial \Omega_1(x)} (u \partial_x \mathbf{m} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\xi S_1 \bar{u}) + \partial_x (\xi S_1 \bar{u}^2 + c^2 \xi S_1) &= -g \xi S_1 \sin \theta + c^2 \xi \frac{d S_1}{dx} - g \xi S_1 \bar{z}_1 \frac{d}{dx} \cos \theta \\ &+ \xi \int_{\partial \Omega_1(x)} u (u \partial_x \mathbf{m} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (1.81)$$

où $\bar{f}$ désigne la moyenne de f suivant la section $\Omega(x)$:

$$\bar{f} = \int_{1-\frac{c^2}{g}e^{-g/c^2 R(x)}}^{1-\frac{c^2}{g}e^{-g/c^2 R(x)}} \int_{\alpha(x,z_1)}^{\beta(x,z_1)} f(y, z_1) dy dz_1 = \int_{-R(x)}^{R(x)} e^{-g/c^2 z} \int_{\alpha(x,z_1(z))}^{\beta(x,z_1(z))} f(y, z) dy dz$$

et $\mathbf{V} = (v, w_1)^t$. L'intégrale de bord dans les équations (1.80) et (1.81) est nulle pour les mêmes raisons que dans les équations (1.72) et (1.73).

En notant $A_1(t, x) = \xi S_1$ et $Q_1(t, x) = A_1(t, x)\bar{u}(t, x)$, on obtient les équations suivantes :

$$\partial_t A_1 + \partial_x Q_1 = 0, \quad (1.82)$$

$$\partial_t Q_1 + \partial_x (Q_1/A_1^2 + c^2(A_1 - S_1)) = -gA_1 \sin \theta + c^2(A_1/S_1 - S_1) \frac{dS_1}{dx} \quad (1.83)$$

$$-g\xi S_1 \bar{z}_1 \frac{d}{dx} \cos \theta. \quad (1.84)$$

■

1.4 Les équations PFS

Dans les Sections 1.2 et 1.3, on a dérivé un modèle pour les écoulements à surface libre et un modèle pour les écoulements en charge de formulation très proches. Les équations à surface libre sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{sl} + \partial_x Q_{sl} = 0, \\ \partial_t Q_{sl} + \partial_x \left(\frac{Q_{sl}^2}{A_{sl}} + p_{sl}(x, A_{sl}) \right) = -gA_{sl} \frac{dZ}{dx} + Pr_{sl}(x, A_{sl}) - gA_{sl} \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \\ -gK(x, A_{sl}) \frac{Q_{sl}|Q_{sl}|}{A_{sl}} \end{array} \right. \quad (1.85)$$

où

$$\begin{aligned} p_{sl}(x, A_{sl}) &= gI_1(x, A_{sl}) \cos \theta, \\ Pr_{sl}(x, A_{sl}) &= gI_2(x, A_{sl}) \cos \theta, \\ K(x, A_{sl}) &= \frac{1}{K_s^2 R_h(A_{sl})^{4/3}} \end{aligned}$$

avec I_1 et I_2 sont définis respectivement par (1.48) et (1.49).

Les équations en charge sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_{ch} + \partial_x Q_{ch} = 0, \\ \partial_t Q_{ch} + \partial_x \left(\frac{Q_{ch}^2}{A_{ch}} + p_{ch}(x, A_{ch}) \right) = -gA_{ch} \frac{dZ}{dx} + Pr_{ch}(x, A_{ch}) - gA_{ch} \bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \\ -gK(x, S) \frac{Q_{ch}|Q_{ch}|}{A_{ch}} \end{array} \right. \quad (1.86)$$

où

$$\begin{aligned} p_{ch}(x, A_{ch}) &= c^2(A_{ch} - S), \\ Pr_{ch}(x, A_{ch}) &= c^2 \left(\frac{A_{ch}}{S} - 1 \right) \frac{dS}{dx}, \\ K(x, S) &= \frac{1}{K_s^2 R_h(S)^{4/3}}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on constate que ces deux modèles ont les termes $\frac{dZ}{dx}$ (où on a posé $Z(x) = b(x)$ grâce à l'hypothèse (1.60)), $\bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta$ en commun et un terme de friction similaire.

Remarque 1.4.1. On choisit généralement l'axe d'écoulement privilégié pour $Z(x)$. Ce choix est particulièrement bien adapté pour les écoulements en charge, puisque l'écoulement étant unidirectionnel, les vitesses sont orthogonales à la section, donc parallèles à cet axe. Toutefois, pour un écoulement à surface libre (le choix naturel serait plutôt la base de la conduite), ce dernier limite les variations de section (comme illustrée FIG. 1.9) car dans ce cas, les vitesses ne sont plus forcément parallèles à cet axe.

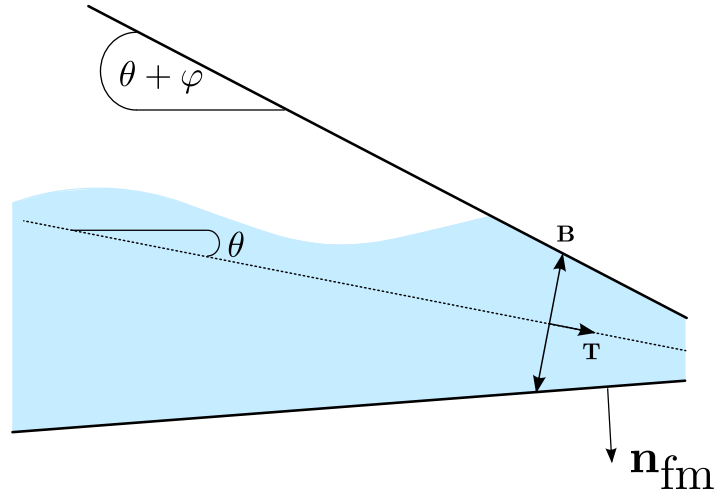


FIGURE 1.9 – Restriction géométrique du domaine : φ petit devant θ .

La réelle différence entre ces deux modèles provient essentiellement de la loi de pression (et naturellement aussi du terme source de pression) : l'une est de type « acoustique » et l'autre de type « hydrostatique ». Cette ressemblance entre ces deux modèles nous invite à utiliser un seul jeu de variables conservatives ; à cet effet, on va définir des variables dites « mixtes ». D'autre part, on construit une pression « mixte » continue à travers les points de transition mais nécessairement à gradient discontinu à cause du saut de la vitesse du son en charge et en surface libre.

On introduit un indicateur d'état $E = E(\rho; \rho_0)$ (c.f. FIG. 1.11) tel que :

$$E = \begin{cases} 1 & \text{si l'écoulement est en charge, i.e. } (\rho \neq \rho_0), \\ 0 & \text{si l'écoulement est à surface libre, i.e. } (\rho = \rho_0) \end{cases} \quad (1.87)$$

et on définit la *section d'eau physique* $\mathbf{S}$ par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(A, E) = \begin{cases} S & \text{si } E = 1, \\ A & \text{si } E = 0. \end{cases} \quad (1.88)$$

On pose ensuite

$$A = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{S}, \quad (1.89)$$

$$Q = Au \quad (1.90)$$

les variables qu'on appellent « mixtes ». Elles vérifient :

- si l'écoulement est à surface libre, $\rho = \rho_0$, $E = 0$ et donc $\mathbf{S} = A$, et
- si l'écoulement est en charge, $\rho \neq \rho_0$, $E = 1$ et donc $\mathbf{S} = S$.

Pour construire la loi de pression « mixte », on pose (c.f. FIG. 1.11)

$$p(x, A, E) = c^2(A - \mathbf{S}) + gI_1(x, \mathbf{S}) \cos \theta \quad (1.91)$$

où le terme I_1 est défini par :

$$I_1(x, \mathbf{S}) = \int_{-R(x)}^{\mathcal{H}(\mathbf{S})} (\mathcal{H}(\mathbf{S}) - z) \sigma(x, z) dz \quad (1.92)$$

avec $\mathcal{H}$ représentant la z -coordonnée du niveau d'eau :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{S}) = \begin{cases} h(A) & \text{si } E = 0, \\ R(x) & \text{si } E = 1. \end{cases} \quad (1.93)$$

La pression ainsi construite est continue :

$$\lim_{\substack{A \rightarrow S \\ A < S}} p(x, A, E) = \lim_{\substack{A \rightarrow S \\ A > S}} p(x, A, E)$$

et à gradient discontinu (c.f. FIG. 1.10) :

$$\frac{\partial p}{\partial A}(x, A, 0) = \sqrt{\frac{gA}{T}} \neq c^2 = \frac{\partial p}{\partial A}(x, A, 1).$$

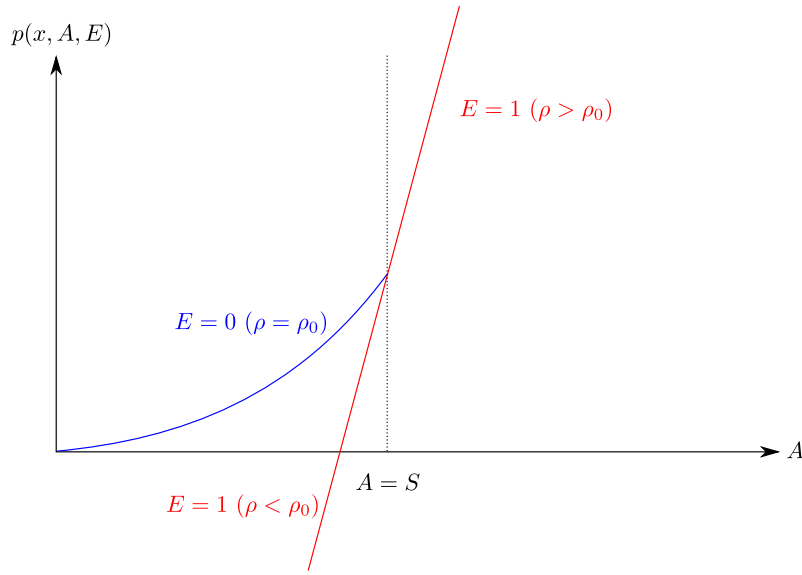


FIGURE 1.10 – Loi de pression dans le cas d’une conduite à section circulaire.

À partir des équations à surface libre (1.85), des équations en charge (1.86), des variables « mixtes » (1.89)-(1.90), de l’indicateur d’état E (1.87), de la section d’eau physique $\mathbf{S}$ (1.88) et de la loi de pression (1.91), on obtient les équations modélisant les écoulements mixtes, appelées équations **PFS** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A + \partial_x Q = 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + p(x, A, E) \right) = -gA \frac{dZ}{dx} + Pr(x, A, E) \\ \quad - G(x, A, E) \\ \quad - gK(x, A, E) \frac{Q|Q|}{A} \end{array} \right. \quad (1.94)$$

où Pr , K , et G représente respectivement le terme source de pression, le terme de courbure, le terme de frottement :

$$\begin{aligned} Pr(x, A, E) &= c^2 \left(\frac{A}{S} - 1 \right) \frac{dS}{dx} + gI_2(x, S) \cos \theta \\ \text{avec } I_2(x, S) &= \int_{-R(x)}^{\mathcal{H}(S)} (\mathcal{H}(S) - z) \partial_x \sigma(x, z) dz, \\ G(x, A, E) &= gA \bar{z}(x, S) \frac{d}{dx} \cos \theta, \\ K(x, A, E) &= \frac{1}{K_s^2 R_h(S)^{4/3}}. \end{aligned}$$

Remarque 1.4.2. À partir des équations **PFS**, on retrouve trivialement le modèle à surface libre. En effet, si $E = 0$ alors $S(A, E) = A$ donc la pression (1.91) est la pression hydrostatique, le terme source Pr est aussi le terme source de pression hydrostatique. Il s'ensuit que le système (1.94) coïncide exactement avec le système à surface libre (1.85).

Si $E = 1$, alors $S(A, E) = S$ et la loi de pression donne $c^2(A - S) + gI_1(x, S) \cos \theta$ qui est exactement la loi de pression en charge si on considère $p_a(x) = gI_1(x, S) \cos \theta$ au lieu de 0 dans la dérivation des équations en charge (c.f. Section 1.3). On peut alors interpréter le terme $p_a(x)$ comme étant la pression à l'état limite, i.e. entre un état en surpression et en dépression. On illustre les différentes situations possible lors d'un écoulement mixte à la figure 1.11.

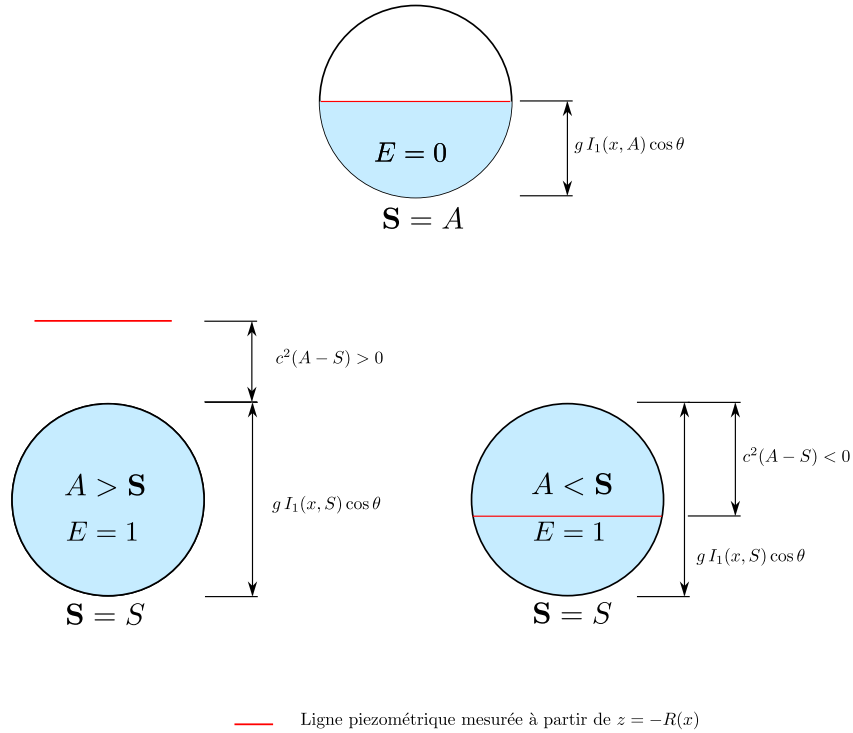


FIGURE 1.11 – État à surface libre $p(X, A, 0) = gI_1(X, A) \cos \theta$ (en haut), état en charge avec surpression $p(x, A, 1) > 0$ (en bas à gauche), état en charge avec dépression $p(x, A, 1) < 0$ (en bas à droite).

Remarque 1.4.3. On a vu que lorsque l'écoulement est complètement en charge, les états de surpression sont signalés lorsque $A > S$ et les états de dépression lorsque $A < S$. Cependant,

lorsque l'écoulement est mixte et que $A < S$, la seule donnée de A ne suffit pas à déterminer la nature de l'écoulement. Alors, l'indicateur d'état E est là pour palier cette difficulté. Ainsi, l'utilisation conjointe d'un algorithme discret sur E permet de décrire aussi bien les zones en dépression qu'à surface libre. Lorsque $A > S$, sans aucune ambiguïté, l'état en charge est proclamé. Parallèlement, au changement d'état correspond le suivi d'un point de transition. Les points de transition entre deux types d'écoulements sont traités comme une frontière libre, correspondant à une discontinuité du gradient de pression. Au Chapitre 2, deux techniques numériques sont présentées pour le suivi d'interface en se basant sur des conditions de transition de Song [97].

Enfin, on termine ce chapitre par quelques propriétés mathématiques des équations **PFS** :

Théorème 1.4.1.

1. Les vecteurs propres à droites de la matrice de convection du système (1.94) sont :

$$\lambda^- = u - c(A, E), \quad \lambda^+ = u + c(A, E)$$

$$\text{avec } c(A, E) = \begin{cases} \sqrt{g \frac{A}{T(x, A)}} \cos \theta & \text{si } E = 0, \\ c & \text{si } E = 1. \end{cases}$$

Le système (1.94) est strictement hyperbolique pour $A(t, X) > 0$.

2. Pour les solutions régulières, la vitesse moyenne $u = Q/A$ satisfait

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} + c^2 \ln(A/S) + g\mathcal{H}(S) \cos \theta + gZ \right) \\ = -gK(X, A, E)u|u| \leq 0. \end{aligned} \quad (1.95)$$

La quantité $\frac{u^2}{2} + c^2 \ln(A/S) + g\mathcal{H}(S) \cos \theta + gZ$ est la charge totale.

3. L'état stationnaire à vitesse nulle est donné par :

$$u = 0 \quad \text{et} \quad c^2 \ln(A/S) + g\mathcal{H}(S) \cos \theta + gZ = \text{cte}. \quad (1.96)$$

4. Le système admet une entropie mathématique

$$\mathcal{E}(A, Q, E) = \frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/S) + c^2 S + gA\bar{z}(x, S) \cos \theta + gAZ \quad (1.97)$$

qui satisfait l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_x \left((\mathcal{E} + p(x, A, E)) u \right) = -gAK(x, A, E)u^2|u| \leq 0 \quad (1.98)$$

qui est une égalité pour les solutions régulières.

Noter que la charge totale et $\mathcal{E}$ sont définies continûment à travers les points de transition.

Preuve du Théorème 1.4.1 :

Les équations (1.95) et (1.98) sont obtenues avec des techniques standard. En effet, en multipliant l'équation de conservation de la masse par u et en retranchant l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient l'équation (1.95). Ensuite, en multipliant l'équation de

conservation de la masse par $\left(\frac{U^2}{2} + c^2 \ln(A/S)g\mathcal{H}(S) \cos \theta + gZ\right)$ et en ajoutant le résultat de la multiplication de l'équation (1.95) par Q , on obtient :

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/S) + c^2 S + gA\bar{z}(x, S) \cos \theta + gAZ \right) \\ & + \partial_x \left(\left(\frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/S) + c^2 S + gA\bar{z}(x, S) \cos \theta + gAZ + p(x, A, E) \right) u \right) \\ & + c^2 \left(\frac{A}{S} - 1 \right) \partial_t S = -gAK(x, A, E)U^2|U| \leq 0. \end{aligned}$$

Le terme $c^2 \left(\frac{A}{S} - 1 \right) \partial_t S$ est identiquement nul puisque si l'écoulement est à surface libre alors $S = A$, sinon $S = S(x)$. De plus, d'après la dernière inégalité, si $S = A$, on trouve l'inégalité d'entropie classique avec $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(A, Q, E) = \frac{Q^2}{2A} + gA\bar{z}(x, A) \cos \theta + gAZ.$$

De même, lorsque l'écoulement est complètement en charge, on a l'entropie mathématique suivante :

$$\mathcal{E}(A, Q, E) = \frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/S) + c^2 S + gAZ.$$

Finalement, l'entropie mathématique des équations **PFS** est donnée par :

$$\mathcal{E}(A, Q, E) = \frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/S) + c^2 S + gA\bar{z}(x, S) \cos \theta + gAZ$$

qui est continue à travers les points de transition. Le flux d'entropie associé à $\mathcal{E}$ est alors donné de manière classique par $(\mathcal{E} + p)U$. Ce qui achève la démonstration. ■

1.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, on a dérivé des équations pour les écoulements mixtes en conduite fermée à section et à pente variables. Ce modèle est une généralisation des équations proposé par Bourdarias *et al.* [18]. Par rapport à la méthode de la fente de Preissmann combinée aux équations de Saint-Venant usuelles, le modèle **PFS** a l'avantage de prendre en compte la compressibilité de l'eau lorsque la conduite est pleine. En outre, cela permet de prendre en compte le caractère dynamique des écoulements en charge.

Les équations **PFS** étant obtenues par un couplage d'équations de Saint-Venant en conduite fermée et d'équations en charge à travers un point de transition, il est nécessaire d'avoir une méthode de suivi d'interface. Compte tenu de l'amplitude de la vitesse d'onde en charge ($c \approx 1400$ m/s) et de la vitesse du son à surface libre ($c \approx 1$ m/s), le flux des équations **PFS** est continu et à gradient discontinu. Plus généralement, ces équations appartiennent à une classe de systèmes de lois de conservations hyperboliques à gradient discontinu et plus particulièrement une généralisation d'équations couplées à travers une discontinuité fixe (voir [77, 90, 84] pour le célèbre exemple du trafic routier de Lighthill-Whitham-Richards) puisque ici, la discontinuité est mobile. C'est un problème délicat car la définition de la solution du problème de Riemann associé à ce type de couplage admet, en général, une infinité de solution car deux états de part et d'autre

de l'interface, il existe une infinité de chemin pouvant les relier. Dans la thèse de Boutin [20], par exemple, on peut définir des chemins à l'aide de critères physiques qui permettent d'extraire la solution. À ma connaissance et à ce jour, il n'existe aucun résultat pour les discontinuités mobiles. Cependant, lorsque les données de Riemann associées au Problème de Riemann pour les équations **PFS** sont en charge ou en surface libre, alors la solution est construite de manière classique (voir, par exemple, [102]). Des travaux à ce sujet sont actuellement en cours. Une telle étude pour les équations **PFS** est nécessaire en vue de décrire avec précision la vitesse de déplacement de l'interface et les changements d'états. En particulier, on pourrait alors valider mathématiquement les conditions de Song [96]. Ces conditions sont utilisées pour les simulations numériques. En particulier, au chapitre suivant, à l'aide de ces dernières, on généralise la méthode, qu'on a appelée « onde fantôme » et on propose une nouvelle approche complètement cinétique, appelée FKA. Elles constituent toutes les deux des méthodes de suivis d'interface qui sont numériquement validées.

CHAPITRE 2

Approximation des équations PFS par Volumes Finis

Sommaire

2.1	Introduction	39
2.1.1	Systèmes hyperboliques homogènes	40
2.1.2	Systèmes hyperboliques avec termes sources	45
2.2	Approximation du flux numérique par une méthode VFRoe	47
2.2.1	Principe du schéma	48
2.2.2	Le problème de Riemann linéarisé sans point de transition	49
2.2.3	Le problème de Riemann linéarisé avec point de transition : approche « onde fantôme »	52
2.2.3.1	Montée en charge vers l'aval	53
2.2.3.2	Descente à surface libre vers l'aval	54
2.2.4	Condition CFL et suivi de l'état d'une maille	56
2.2.5	Traitement des conditions aux limites	59
2.2.5.1	Pas de point de transition localisé à l'amont	60
2.2.5.2	Un point de transition est localisé à l'amont	63
2.2.6	Construction d'un schéma préservant les états stationnaires à vitesse nulle	64
2.2.6.1	L'approximation avec la matrice standard	66
2.2.6.2	Une matrice à profil stationnaire	68
2.2.6.3	Traitement d'un état stationnaire mixte à vitesse nulle	76
2.2.7	Quelques simulations numériques en écoulement mixte et dépression	76
2.2.8	Remarques générales concernant l'approximation numérique par le solveur VFRoe	82
2.3	Approximation du flux numérique par une méthode cinétique	83
2.3.1	Principe du solveur cinétique	83
2.3.1.1	Caractérisation de la fonction χ pour le modèle en charge	85
2.3.1.2	Caractérisation de la fonction χ pour le modèle à surface libre	87
2.3.2	Solveur cinétique dans le cadre d'un écoulement sans point de transition	90
2.3.2.1	Calcul du flux numérique microscopique	91
2.3.2.2	Propriétés du schéma cinétique	95
2.3.3	Traitement des points de transitions : approche FKA	99
2.3.4	Traitement des conditions aux limites	102
2.3.5	Construction d'un schéma bien équilibré	104
2.3.6	Quelques simulations numériques	105
2.3.6.1	Validation numérique du modèle en charge	105
2.3.6.2	Validation numérique du modèle mixte	107
2.3.7	Remarques générales concernant l'approximation numérique par le solveur cinétique	129

Ce chapitre est un développement de la deuxième partie de l'article

C. Bourdarias, **M. Ersoy** and S. Gerbi. *A model for unsteady mixed flows in non uniform closed water pipes and a well-balanced finite volume scheme*. International Journal On Finite Volumes, 6(2) :1–47, 2009.

et des articles :

C. Bourdarias, **M. Ersoy** and S. Gerbi. *A kinetic scheme for pressurised flows in non uniform closed water pipes* Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, 31 :1–20, 2009.

C. Bourdarias, **M. Ersoy** and S. Gerbi. *A kinetic scheme for transient mixed flows in non uniform closed pipes : a global manner to upwind all the source terms*. To appear in J. Sci. Comp., 2010.

C. Bourdarias, **M. Ersoy** and S. Gerbi. *Unsteady mixed flows in non uniform closed water pipes : a Full Kinetic Approach*. In preparation, 2010.

En particulier, les schémas numériques VFRoe et cinétique, respectivement, ont contribué au développement des logiciels EDF-CIH ROEMIX et FLOWMIX sous la direction de C. Bourdarias et S. Gerbi.

NOTATIONS

Notations générales

- $x_{1/2}$: nœud amont du maillage (ou interface amont)
- $x_{N+1/2}$: nœud aval du maillage (ou interface aval)
- $x_{i+1/2}$: nœud interne du maillage (ou interface interne)
- $m_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$: maille
- $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$: centre de maille
- $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$: pas du maillage variable
- Δx : pas du maillage constant
- Δt^n : pas de temps
- $\mathbf{U}_i^n = (A_i^n, Q_i^n)$: approximation des valeurs moyennes de A et Q au temps t_n sur une maille m_i interne ($1 < i < N + 1$)
- $X_{i+1/2}^\pm$: notation générique pour désigner une approximation de la quantité X à l'interface interne si $1 < i < N + 1$, amont si $i = 0$ et aval si $i = N$

Notations concernant l'approximation par un solveur VFRoe

- $\mathbf{W}_i^n = (Z_i, \cos \theta_i, S_i, A_i^n, Q_i^n)$ avec les notations ci-dessus pour (A_i^n, Q_i^n) et une approximation de $Z, \cos \theta, S$ sur la maille m_i

Notations concernant l'approximation par un solveur cinétique

- $\Delta \phi_i^n$: décentrement des termes sources
- $\mathbf{W}_i^n = (Z_i, \cos \theta_i, S_i)$ avec les notations ci-dessus
- $\mathcal{M}_i^n$: approximation de la maxwellienne sur la maille m_i au temps t_n

Notations concernant les points de transitions

- CH : charge
- SL : surface libre
- CH/CH : interface charge/charge
- SL/SL : interface surface libre/surface libre
- CH/SL : interface charge/surface libre
- SL/CH : interface surface libre/charge

Autres notations

- FKA : Full Kinetic Approach
- $[X]_{i+1/2}$: saut de la quantité à travers l'interface $x = x_{i+1/2}$
- $[X]$: saut de la quantité à travers l'interface x en question
- **couleur bleu** est en référence à un état à surface libre
- **couleur rouge** est en référence à un état en charge

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la discrétisation des équations **PFS** par des méthodes de Volumes Finis du premier ordre à trois points. On leur porte un intérêt car elles satisfont d'une

part la conservativité et elles sont simples à implémenter numériquement. De manière générale, une loi de conservation est une équation aux dérivées partielles, posée sur $[0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^p$ (éventuellement en domaine non borné)

$$\partial_t \mathbf{U}(t, x) + \operatorname{div}_x F(x, \mathbf{U}) = S(x, \mathbf{U}) \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^p$ est la variable d'espace, $t \in [0, T]$ la variable de temps, $\mathbf{U}(t, x)$ un champ de vecteur de $\mathbb{R}^n$ (la variable conservative), $F = F(x, \mathbf{U})$ le flux associé, dépendant explicitement de x et $\mathbf{U}$ ici, et S le terme source modélisant l'action des interactions de champs externes.

Étant donnée un volume de contrôle $K \subset \Omega$, les équations précédentes expriment la conservation de la variable $\mathbf{U}$ sur K . Autrement dit, elle expriment le bilan physique pour $\mathbf{U}$ sur K :

$$\frac{d}{dt} \int_K \mathbf{U}(t, x) dx + \int_{\partial K} F(t, x) \cdot \mathbf{n}_K ds dt = \int_K S(t, x) dx$$

et elles sont formellement équivalentes à : pour tout $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$

$$\int_K \mathbf{U}(t_2, x) dx - \int_K \mathbf{U}(t_1, x) dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial K} F(t, x) \cdot \mathbf{n}_K ds dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_K S(t, x) dx dt \quad (2.2)$$

où $\mathbf{n}_K$ est la normale unitaire sortante au bord de K , noté ∂K et dx est la p -dimensionnelle mesure de Lebesgue, et ds est la $(p - 1)$ -dimensionnelle mesure sur ∂K . L'équation intégrale précédente est à la base de toute méthode Volumes Finis.

Dans notre cas, et pour tout le reste de ce chapitre, nous nous limiteront au cas $p = 1$. Pour simplifier l'exposé, nous supposons $T = +\infty$ et $\Omega = \mathbb{R}$. Considérons un maillage spatial uniforme formé d'intervalles, $m_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $i \in \mathbb{Z}$ de centre $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante tel que $t_0 = 0$, on considère Δt le pas de temps tel que $t_n = n\Delta t$. Δt est supposé fixé. Alors, en utilisant l'équation intégrale (2.2) avec $t_1 = t_n$, $t_2 = t_{n+1}$, $K = m_i$ ou encore en intégrant l'équation de lois de conservation (2.1) sur $[t_n, t_{n+1}] \times m_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{m_i} \mathbf{U}(t_{n+1}, x) dx - \int_{m_i} \mathbf{U}(t_n, x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, x_{i+1/2}) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, x_{i-1/2}) dt \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{m_i} S(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1.1 Systèmes hyperboliques homogènes

En notant $\mathbf{U}_i^n$ une approximation de la valeur moyenne de $\mathbf{U}(\cdot, t_n)$ sur m_i , on définit un schéma numérique, dit *Volume Finis*, sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}) \quad (2.4)$$

où $\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n)$ est une approximation consistante de $\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, x_{i+1/2}) dt$. En particulier, le flux numérique $\mathcal{F}_{i\pm 1/2}$ peut satisfaire la *relation de consistance* pour tout état $\mathbf{U}$:

$$\mathcal{F}_{i\pm 1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = F(\mathbf{U}).$$

Dans le reste du chapitre, un schéma numérique est dit consistant si il satisfait l'égalité ci-dessus. La consistance du flux numérique est la propriété minimale qu'un schéma doit satisfaire. Cette

relation assure que le schéma numérique (2.4) correspond bien à une « bonne » approximation de l'équation (2.1). Plus précisément, si $\mathbf{U}_i^n$ est la valeur moyenne d'une solution régulière $\mathbf{U}(\cdot, t_n)$ de l'équation (2.1) et $\mathbf{U}_i^{n+1}$ est calculée à partir du schéma (2.4), alors

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{U}(t_{n+1}, x) dx + \Delta t (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2} + \varepsilon_i)$$

avec

$$\mathcal{F}_{i+1/2} \rightarrow 0, \varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta t \rightarrow 0 \text{ et } \Delta x \rightarrow 0$$

où ε_i est le terme de *diffusion numérique* (ou appelé *viscosité numérique*). Il nous renseigne sur la qualité de précision du schéma (2.4) (voir, par exemple, [44, 11]).

⚠ Il est important de signaler, que, dans ce contexte d'un schéma explicite, il est toujours nécessaire d'imposer une condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) sur le pas de temps pour éviter l'explosion du schéma. Elle est du type :

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

et empêche que deux courbes caractéristiques issues d'interfaces voisines s'intersectent. Dans cette expression $|a|$ est la vitesse de propagation.

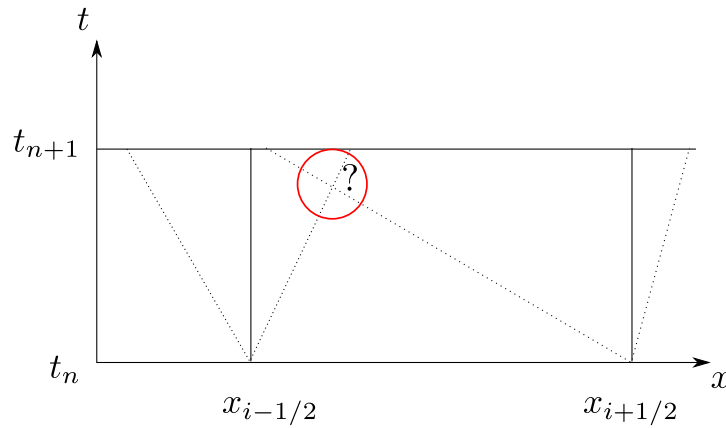


FIGURE 2.1 – 1 CFL

La stabilité d'un schéma Volume Finis peut être étudiée de différentes manières. Celles que nous retenons ici, concernant directement les équations **PFS**, sont la monotonie et l'existence d'une inégalité d'entropie discrète. La *monotonie* est une propriété de conservation d'invariance de domaine, à savoir si $\mathbf{U}_i^n \in \mathcal{C}$ alors $\mathbf{U}_i^{n+1} \in \mathcal{C}$ pour tout i . Par exemple, dans le cas des équations de Saint-Venant, l'ensemble $\mathcal{C} = \{h > 0\}$ où h est la hauteur d'eau. La seconde propriété est liée à l'entropie mathématique, noté $\mathcal{E}$: c'est une fonction convexe de la variable $\mathbf{U}$ qui satisfait l'*inégalité d'entropie*, de flux $\mathcal{G}$,

$$\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{U}) + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{U}) \begin{cases} = 0 & \text{pour les solutions régulières de (2.1),} \\ \leq 0 & \text{pour les solutions faibles de (2.1).} \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette inégalité permet de sélectionner la solution faible de l'équation. Si $\mathcal{G}_{i\pm 1/2}$ est le flux numérique associé à l'inégalité (2.5), consistant avec le flux $\mathcal{G}$ (au sens défini précédemment), et si l'*inégalité d'entropie discrète* est satisfaite

$$\mathcal{E}_i^{n+1} - \mathcal{E}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{G}_{i+1/2} - \mathcal{G}_{i-1/2}) \leq 0$$

alors il constitue un critère important de stabilité numérique.

Enfin, une dernière propriété, évidente pour les systèmes homogènes, est la capacité du schéma numérique à préserver les états stationnaires : on parle de *schéma bien équilibré*. Cette relation d'équilibre se traduit par

$$\partial_t \mathbf{U} = 0, \partial_x F = 0.$$

Elle est trivialement satisfaite dès que le flux numérique est consistant.

Choix du flux numérique.

Il va dépendre du solveur que l'on souhaite utiliser. Pour cela, on définit le *problème de Riemann*, PR, associé à la loi de conservation (2.1) et de la *donnée de Riemann* par :

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour résoudre ce problème, on distingue le *solveur de Riemann exact* et le *solveur de Riemann approché*. Le solveur de Riemann exact, comme son nom l'indique, résout exactement (2.1)-(2.6). On lui donne le nom de *schéma de Godunov*. Ce dernier est généralement remplacé par des solveurs de Riemann approchés plus simples à être implémentés et moins coûteux en temps de calcul. On distingue deux types de solveur approché : on a les solveurs au sens de Harten, Lax, Van Leer [62] (HLL) et ceux de type *VFRoe* [32, 44].

Solveur HLL.

Les solveurs au sens de HLL sont classiquement :

- les *solveurs simples* (en particulier le *solveur de Roe*) [91],
- les *solveurs de relaxations* [74],
- les *solveurs cinétiques* [88].

De manière générale (c.f. Bouchut [11]), un solveur de Riemann approché, au sens HLL, est un champ de vecteur $R(x/t, \mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r)$, approximation de la solution exacte du PR, qui satisfait la propriété suivante :

$$R(x/t, \mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{U}$$

et le flux numérique $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ satisfait la propriété de conservation :

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) = \mathcal{F}_r(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) &= F(\mathbf{U}_l) - \int_{-\infty}^0 R(v, \mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) - \mathbf{U}_l dv, \\ \mathcal{F}_r(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) &= F(\mathbf{U}_r) + \int_0^{+\infty} R(v, \mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) - \mathbf{U}_r dv. \end{aligned}$$

Les notations $\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_r, \mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r$ correspondent respectivement à $\mathcal{F}_{i-1/2}, \mathcal{F}_{i+1/2}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}$ (introduit ci-dessus).

De plus, si le solveur R est *dissipatif*, i.e. :

$$\mathcal{G}_r(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) - \mathcal{G}_l(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) \leq 0$$

où le flux d'entropie numérique $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ donné par :

$$\mathcal{G}_l(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) = \mathcal{G}(\mathbf{U}_l) - \int_{-\infty}^0 \mathcal{E}(R(v, \mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r)) - \mathcal{E}(\mathbf{U}_l) dv,$$

$$\mathcal{G}_r(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) = \mathcal{G}(\mathbf{U}_r) + \int_{-\infty}^0 \mathcal{E}(R(v, \mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r)) - \mathcal{E}(\mathbf{U}_r) dv$$

alors l'inégalité d'entropie discrète (2.5) est satisfaite.

À l'aide de cette définition, on peut interpréter $\mathbf{U}_i^n$ comme la valeur moyenne de la fonction $\mathbf{U}^n(x) = \sum_i \mathbf{U}_i^n \mathbb{1}_{m_i}(x)$ où $\mathbb{1}_{m_i}(x)$ est la fonction indicatrice de m_i . Par exemple, pour une condition CFL de $\frac{1}{2}$, on pose :

$$R(x/t, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^n & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t - t_n} \right), \\ \mathbf{U}_{i+1}^n & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{1}{2} \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t - t_n} \right) \end{cases},$$

et on définit une solution approchée $\mathbf{U}(t, x)$ (c.f. FIG. 2.2) pour $(t, x) \in [t_n, t_{n+1}) \times (x_i, x_{i+1})$ par

$$\mathbf{U}(t, x) = R\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{t - t_n}, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n\right).$$

En utilisant la définition du solveur de Riemann approché, la définition et la consistance du flux numérique, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{U}(t_{n+1}, x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{U}^{n+1}(x) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} R\left(\frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}, \mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} R\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n\right) dx \\ &= \mathbf{U}_i^n + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} R\left(\frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}, \mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n\right) - \mathbf{U}_i^n dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} R\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n\right) - \mathbf{U}_i^n dx \\ &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}_l(\mathbf{U}_{i+1}^n, \mathbf{U}_i^n) - \mathcal{F}_r(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n)). \end{aligned}$$

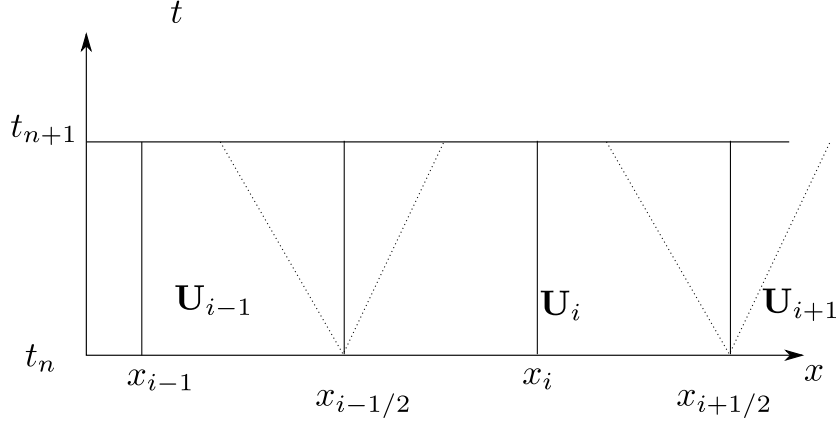


FIGURE 2.2 – Solution approchée par un solveur HLL

Solveur de type VFRoe.

Dans ce cas, le flux numérique est obtenu à partir de la solution du problème de Riemann linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \tilde{D}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) \partial_x \mathbf{U} = 0, \\ \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_l & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

où la matrice $\tilde{D}$ est habituellement approchée par

$$\tilde{D} = D \left(\frac{\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n}{2} \right)$$

avec $D(\mathbf{U}) = D_{\mathbf{U}} F(\mathbf{U})$ représentant la *matrice de convection*. On définit le flux numérique par

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) = F(R(0^-, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n))$$

et

$$\mathcal{F}_r(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n) = F(R(0^+, \mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n))$$

où $R(x/t, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$ est la solution exacte du problème de Riemann linéarisé construite à partir d'un solveur simple.

Singularité du flux.

Lorsque le flux devient singulier (i.e. les valeurs propres de la matrice de convection sont 0), le système perd la propriété d'hyperbolicité. Par exemple, cela se produit :

- avec les équations de la dynamique des gaz lorsque la densité s'annule : on parle de l'apparition du vide,
- avec les équations de Saint-Venant lorsque la hauteur d'eau s'annule : on parle d'écoulement sur fond sec ou assèchement selon la situation.

Un solveur R de type HLL ou VFRoe résout ce problème s'il est capable de traiter les cas où un des deux états de part et d'autre de l'interface est nul tout en préservant la monotonie et donnant une vitesse de propagation finie, sinon on pose $\Delta t = 0$. Le cas où les deux états sont nuls est évident, il suffit de poser $R = 0$. Nous verrons qu'un schéma qui traite naturellement, sans artefact, ce problème est le schéma cinétique.

2.1.2 Systèmes hyperboliques avec termes sources

La résolution numérique de systèmes de lois de conservation hyperboliques se complique quand des termes sources S sont présents. En effet, les propriétés physiques (monotonie, inégalité d'entropie, ...) par rapport à la variable d'état $\mathbf{U}$ sont considérablement modifiées. En particulier, la conservation des états stationnaires doit à présent satisfaire un équilibre entre les forces externes (les termes sources) et les forces internes. Autrement dit, l'équation suivante doit être préservée

$$\partial_t \mathbf{U} = 0, \partial_x F(x, \mathbf{U}) = S(x, \mathbf{U}).$$

Un terme source se présente généralement sous la forme d'un terme $f(x, \mathbf{U})$ (par exemple, la friction) ou sous la forme d'un produit non-conservatif $\mathbf{U}_i \partial_x Z$ (par exemple, un terme de topographie) où f a une dépendance en x et éventuellement en $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}_i$ étant la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\mathbf{U}$).

Nous avons vu que tous les schémas numériques pour les systèmes hyperboliques homogènes préservent les états stationnaires. La prise en compte de termes sources ajoute une difficulté additionnelle, à savoir, assurer numériquement le plus de propriétés afin d'être consistant avec le modèle continu : la consistance du flux, l'équilibre et éventuellement l'inégalité d'entropie discrète (comme il a été mentionné dans [59, 73, 5]). Il est donc utile de construire une approximation consistante du terme source.

Dans cette perspective, les schémas dit *schémas bien équilibrés* (*Well-Balanced schemes* ou encore les schémas satisfaisant la *C-property*) ont fait l'objet de nombreuses publications.

Ils ont été initialement introduits pour des lois de conservations hyperboliques scalaires par Greenberg *et al.* [59, 60]. Ils ont été généralisés par Gosse *et al.* [56, 55] pour des termes sources non réguliers pour lesquels les produits non-conservatifs prennent un sens à l'aide de la théorie DLM [81]. Cette méthode a été dérivée dans le cadre d'un solveur de Roe.

Un autre schéma bien équilibré est proposé par LeVêque [73] : « the quasi steady state wave propagation algorithm ». Il introduit un problème de Riemann au centre de chaque maille de sorte que la différence des états annule l'effet du terme source.

Un *schéma à profil stationnaire* est présenté par Leroux *et al.* [92]. Il représente la solution approchée par une solution stationnaire dans chaque maille. De nombreuses méthodes pour construire des schémas bien équilibrés sont basées sur ce principe.

Botchorishvili *et al.* [10] proposent une méthode nommée *equilibrium schemes*. C'est la première approche de relaxation qui en plus de préserver les équilibres, satisfait l'inégalité d'entropie discrète.

Une méthode *Central-Upwind scheme* est proposée par Kurganov *et al.* [70]. Elle est basée sur une quadrature « bien choisie » du terme source $\mathcal{S}_i = \int_{m_i} S dx$ pour obtenir un schéma bien

équilibré à l'ordre 2 (i.e $\left| \frac{1}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}) + \mathcal{S}_i \right| = O(\Delta x^2)$).

De manière générale, toutes ces méthodes ont été étendues aux cas de systèmes de lois de conservation, principalement pour le système de Saint-Venant. Dans le formalisme VFRoe, Gallouët *et al.* [50] étudient et proposent par le biais de changement de variable convenables des schémas bien équilibrés en décentrant les termes sources aux interfaces suivant l'idée introduite dans [59].

À l'aide d'un solveur de type Roe, Garcia-Navarro *et al.* [52] présentent un schéma bien équilibré en prenant en compte le terme source aux interfaces.

Dans le même esprit, Jin [65] propose un schéma simple beaucoup plus générale que [52], et valable pour tout solveur.

Le premier schéma bien équilibré satisfaisant la monotonie, l'inégalité d'entropie discrète, traitant les singularités du flux est le schéma cinétique de Perthame *et al.* [88]. Il est basé sur la formulation cinétique des équations de Saint-Venant et utilise un schéma de réflexion à l'échelle microscopique. Plus généralement, il appartient à la catégorie de schéma *USI* (Upwinding Sources at Interfaces) qui a été introduit dans [89, 66] pour lequel la définition d'une approximation consistante du terme source est donnée. La méthode USI est une technique très générale qui englobe plusieurs schémas, par exemple [73, 88, 10, 65, 52]. Elle est basée sur les schémas à profil stationnaire [92] avec prise en compte du terme source aux interfaces.

Une autre classe de méthode bien équilibrée est la *reconstruction hydrostatique* de Bouchut *et al.* [5]. Elle est basée sur une méthode de décentrement du terme source en le représentant localement par la différence du flux discret. Récemment, la reconstruction hydrostatique a été généralisé par Castro *et al.* [35] aux termes sources non réguliers en utilisant la théorie DLM. Ce sont les schémas *path-conservative numerical scheme*.

Parmi toutes les méthodes citées ci-dessus, seul le schéma cinétique [88] (USI) et la reconstruction hydrostatique [5] sont capables de donner une définition d'une approximation consistante du terme source, de préserver les états stationnaires, garantir la monotonie et satisfaire l'inégalité d'entropie discrète. Néanmoins, nous verrons que le schéma cinétique de Perthame *et al.* [88], dans sa forme actuelle, ne peut être généralisé à des termes sources complexes comme nous le montrons en Section 2.3.2.2.

Enfin, on propose un schéma bien équilibré préservant les états stationnaires à vitesse nulle pour des termes sources complexes (de type friction, produit conservatif et non-conservatif) en remplaçant la matrice de convection pour le solveur VFRoe, précédemment introduite, par une *matrice d'équilibre* (encore appelée *matrice à profil stationnaire*). Suivant cette idée et le principe USI ainsi que [92, 10], on développe un schéma bien équilibré préservant tous les états stationnaires.

Plan du chapitre.

Dans ce chapitre, on utilise un schéma de type Volume Finis du premier ordre, avec un traitement décentré aux interfaces des termes sources par une approche VFRoe et cinétique. L'approximation numérique des équations **PFS** est réalisée en deux temps :

1. traitement des zones sans point de transition (i.e. de part et d'autre de l'interface, l'écoulement est soit en surface libre, soit en charge).
2. traitement avec points de transition.

On a opté pour une méthode Volume Finis avec un solveur VFRoe basé sur la formulation non-conservative des équations **PFS**. Suivant [59], le système est « augmenté » en introduisant les termes sources comme inconnues. On ajoute alors autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Le flux numérique est déterminé en résolvant exactement le problème de Riemann linéarisé associé. La seconde approche est basée sur un solveur cinétique [88]. Le flux numérique est déterminé à partir de la formulation cinétique des équations **PFS** dans lequel les termes sources sont décentrés aux interfaces à l'aide d'une méthode de caractéristique généralisée. Il apparait alors un nouveau terme qu'on appelle *pseudo-topographie* qui permet de regrouper tous les termes sources sous la forme d'un produit non-conservatif. À cet effet, on introduit aussi la notion de *pente dynamique* afin de prendre en compte la friction directement dans le terme de pente.

Les points de transition entre les deux types d'écoulement sont traités comme une frontière libre, correspondant à une discontinuité du gradient de pression. Les états de part et d'autre d'une telle interface sont obtenus via la résolution d'un problème de Riemann linéaire à matrice

discontinue, la ligne de discontinuité coïncidant avec la trajectoire du point de transition. Cette approche a été initialement introduite par Bourdarias *et al.* [19] et adaptée aux cas de termes sources complexes. Je l'ai nommée méthode de « l'onde fantôme » car une caractéristique à surface libre dans une zone en charge n'est pas prise en compte et vice et versa. Cette approche correspond au formalisme du solveur VFRoe. D'autre part, dans le cadre du solveur cinétique, une méthode de suivi des points de transition, appelée FKA (Full Kinetic Approach), a été développée. Les calculs des états à l'interface de transition sont obtenus à partir de relation de conservation des moments microscopiques issue de la formulation cinétique. Bien que ces deux méthodes aient été conçues pour être en harmonie avec leur schéma respectif, rien n'empêche de considérer l'approche « onde fantôme » avec le schéma cinétique et l'approche FKA avec le schéma VFRoe. De manière générale, ces deux approches constituent deux méthodes de suivi d'interface indépendamment du schéma utilisé.

Dans le cas du schéma numérique VFRoe, la matrice de convection classique est remplacé par une nouvelle matrice appelée *matrice d'équilibre* (encore appelée *matrice à profil stationnaire*). Celle-ci est basée sur la représentation locale de la solution stationnaire à vitesse nulle afin d'obtenir un schéma bien équilibré. Cette approche est une méthode à profil stationnaire [92]. Dans le cas du solveur cinétique, et en particulier pour tout solveur, basée sur la matrice d'équilibre et les méthodes USI, on développe un schéma bien équilibré. Cette méthode contrairement à la précédente préserve tous les états stationnaires et s'applique à tout flux numérique consistant.

Dans le reste du chapitre, on utilise les notations suivantes : considérons un maillage spatial formé de N intervalles $m_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ de longueur $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} := h_i$, $1 \leq i \leq N$, de centre $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$ de sorte que si L est la longueur de l'axe principal, on a $x_{1/2} = 0$ et $x_{N+1/2} = L$.

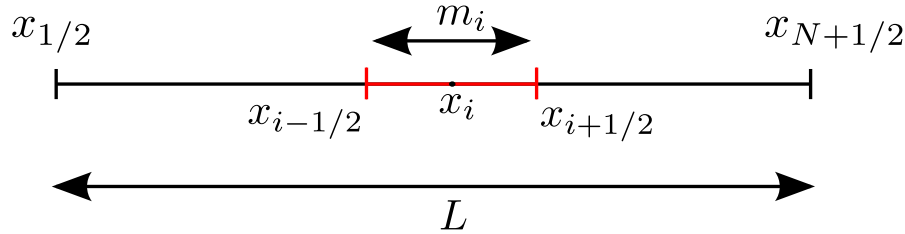


FIGURE 2.3 – Maillage

Soit $(t_n)_{1 \leq n \leq n_{max}}$ une suite croissante tel que $t_0 = 0$ et $(\Delta t^n)_{1 \leq n \leq n_{max}} = (t_{n+1} - t_n)_{1 \leq n \leq n_{max}}$ le pas de temps. Les vecteurs inconnus $U_i^n = \begin{pmatrix} A_i^n \\ Q_i^n \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq n \leq n_{max}$ sont une approximation de la valeur moyenne de la solution exacte $U(x, t_n)$ sur la maille m_i . Les valeurs aux frontières amont et aval seront associées à deux mailles fictives numérotées respectivement 0 et $N + 1$ et aux vecteurs colonnes U_0^n et U_{N+1}^n .

2.2 Approximation du flux numérique par une méthode VFRoe

Dans cette section, on rappelle le principe du schéma explicite VFRoe (voir par exemple [32, 50, 18]) avec traitement décentré du terme source, appliqué aux équations **PFS** (1.94) sans prise en compte des conditions aux limites, par souci de simplicité. Par conséquent, on considère ici que l'indice de maille i parcourt $\mathbb{Z}$. Le traitement des conditions aux limites est présenté

dans la Section 2.2.5. Ce travail est une généralisation du schéma VFRoe [18] aux cas de termes sources complexes.

2.2.1 Principe du schéma

Suivant Leroux *et al.* [59, 92], on utilise une représentation constante par maille de l'altitude de l'axe principale Z $\left(\frac{Z(x)}{dx} = \sin \theta(x)\right)$, du terme $\cos \theta$, de la section S . On adjoint au système les équations $\partial_t Z = 0$, $\partial_t \cos \theta = 0$ et $\partial_t S = 0$ et on note $\mathbf{W}$ le vecteur $\mathbf{W} = (Z, \cos \theta, S, A, Q)^t$. On obtient alors le système sous la forme non-conservative :

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(x, \mathbf{W}) + B(x, \mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = TS(\mathbf{W}) \quad (2.7)$$

où

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \\ \frac{Q^2}{A} + p(x, A) \end{pmatrix}, \quad TS(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g K(x, \mathbf{S}) \frac{Q|Q|}{A} \end{pmatrix}$$

et

$$B(x, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ gA & gA\bar{Z} & -c^2(A/\mathbf{S} - 1) - \gamma(x, \mathbf{W}) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

auquel on associe le problème de Riemann homogène pour la donnée de Riemann :

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \mathbf{W}_l = (Z_l, \cos \theta_l, S_l, A_l, Q_l)^t & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{W}_r = (Z_r, \cos \theta_r, S_r, A_r, Q_r)^t & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Remarque 2.2.1. On a écrit le terme source de pression $gI_2(x, \mathbf{S}) \cos(\theta)$ sous la forme

$$\gamma(x, \mathbf{W}) \frac{dS}{dx}.$$

Par exemple, pour une conduite circulaire, on a

$$\gamma(x, \mathbf{W}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\mathcal{H}(\mathbf{S})\pi}{2} + \mathcal{H}(\mathbf{S}) \arcsin \left(\frac{\mathcal{H}(\mathbf{S})}{R(x)} \right) + \frac{\sigma(x, \mathcal{H}(\mathbf{S}))}{2} \right).$$

Cette façon de discrétiser les termes sources introduit, lors de la résolution du problème de Riemann, des ondes stationnaires associés à Z , $\cos \theta$ et S . Notons $\mathbf{W}_i^n$ « l'inconnue » discrète, approximation de la valeur moyenne de $\mathbf{W}$ sur m_i au temps t_n .

Puisque les valeurs de $Z, \cos \theta, S$ sont connues, par intégration de l'équation (2.7) sur la maille m_i ouverte $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ et en temps $[t_n, t_{n+1})$, on est conduit à écrire le schéma Volumes Finis :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i^{n+1} &= \mathbf{W}_i^n - \alpha_i \left(\mathbf{F}(\mathbf{W}_{i+1/2}^*(0^-, \mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n)) - \mathbf{F}(\mathbf{W}_{i-1/2}^*(0^+, \mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n)) \right) \\ &\quad + TS(\mathbf{W}_i^n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $\alpha_i = \frac{\Delta t^n}{h_i}$. $\mathbf{W}_{i+1/2}^*(\xi = x/t, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ est la solution exacte ou approchée du problème de Riemann associé à l'équation (2.7) homogène, pour la donnée de Riemann (2.8), avec $\mathbf{W}_l = \mathbf{W}_i$ et $\mathbf{W}_r = \mathbf{W}_{i+1}$ comme état gauche et droit. Les termes sources ne figurent donc pas explicitement dans le schéma (puisque ces derniers sont nuls sur la maille ouverte) mais contribuent aux calculs de $\mathbf{W}^*$. **C'est là que réside le décentrement.** La résolution exacte de ce problème de Riemann étant coûteuse, suivant Gallouët *et al.* [50], on utilisera une solution approchée basé sur un problème de Riemann linéarisé.

Le calcul de $\mathbf{W}_{i+1/2}^*(0^\pm, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ va dépendre de deux types d'interfaces localisés aux points $x_{i+\frac{1}{2}}$. Le premier est lorsque l'écoulement est de même nature (i.e. écoulement en charge ou surface libre de part et d'autre de l'interface) pour lequel on doit traiter les interfaces CH/CH (CH pour CHarge) et SL/SL (SL pour Surface Libre). Le second est le cas du point de transition auxquelles sont associées les interfaces SL/CH et CH/SL. En conséquence, selon le type d'écoulement de part et d'autre de l'interface, on va résoudre deux types de problèmes de Riemann.

2.2.2 Le problème de Riemann linéarisé sans point de transition

On expose en premier lieu la définition et la résolution du problème de Riemann linéarisé aux interfaces entre des mailles SL/SL et CH/CH.

On écrit tout d'abord la forme quasi-linéaire des équations (2.7). Pour ce faire, en développant le terme $\partial_x F$, on obtient :

$$\partial_t \mathbf{W} + D(x, \mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W} = TS(\mathbf{W}) \quad (2.10)$$

où D est la matrice de convection définie par :

$$D(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ gA & gA\mathcal{H}(\mathbf{S}) & \Psi(\mathbf{W}) & c^2(\mathbf{W}) - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

avec $\Psi(\mathbf{W}) = gS\partial_S \mathcal{H}(\mathbf{S}) \cos \theta - c^2(\mathbf{W}) \frac{A}{S}$ et $u = Q/A$ la vitesse moyenne de l'eau. $c(\mathbf{W})$ dénote tantôt la vitesse d'onde en charge, c , tantôt la vitesse du son à surface libre, $\sqrt{g \frac{A}{T(A)} \cos \theta}$ selon si l'écoulement est SL ou CH.

Remarque 2.2.2. Par un simple calcul on a $\partial_x I_1(x, A) = I_2(x, A) + \partial_A I_1(A) \partial_x A$: ce qui explique pourquoi le terme source de pression n'apparaît pas explicitement dans les équations (2.10).

À chacune des interfaces SL/SL ou CH/CH, $\mathbf{W}_{i+1/2}^*(0^\pm, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ est défini comme la solution exacte du problème de Riemann linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \tilde{D} \partial_x \mathbf{W} &= 0 \\ \mathbf{W} &= \begin{cases} \mathbf{W}_l = (Z_l, \cos \theta_l, S_l, A_l, Q_l)^t & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{W}_r = (Z_r, \cos \theta_r, S_r, A_r, Q_r)^t & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $(\mathbf{W}_l, \mathbf{W}_r) = (\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ et $\tilde{D} = \tilde{D}(\mathbf{W}_l, \mathbf{W}_r) = D(x, \tilde{\mathbf{W}})$ où $\tilde{\mathbf{W}}$ est une approximation « bien choisie » faisant intervenir l'état gauche $\mathbf{W}_l$ et l'état droit $\mathbf{W}_r$.

Remarque 2.2.3. Nous verrons ultérieurement (voir Section 2.2.6) que le choix classique

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \frac{\mathbf{W}_l + \mathbf{W}_r}{2},$$

issue de l'approximation de la matrice de Roe

$$D_{\text{Roe}}(\mathbf{W}_l, \mathbf{W}_r) = \int_0^1 D(\mathbf{W}_r + (1-s)(\mathbf{W}_l - \mathbf{W}_r)) ds$$

qui donne $\tilde{D} = D(\widetilde{\mathbf{W}}) = D\left(\frac{\mathbf{W}_l + \mathbf{W}_r}{2}\right)$ et qu'on appelle matrice standard n'est pas un bon choix. Avec une telle matrice, le schéma préserve les états stationnaires à vitesse nulle seulement pour l'équation **PFS** homogène (i.e lorsque la conduite est à section uniforme et de pente nulle). Cependant, on propose une nouvelle matrice dite **matrice à profil stationnaire** tel que quelque soit la conduite et le terme de pente, les états stationnaires à vitesse nulle sont toujours préservés.

La matrice $\tilde{D}$ a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \tilde{u} - c(\widetilde{\mathbf{W}}), \lambda_5 = \tilde{u} + c(\widetilde{\mathbf{W}})$$

auxquelles on associe les vecteurs propres à droite :

$$r_1(\widetilde{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} c^2(\widetilde{\mathbf{W}}) - \tilde{u}^2 \\ 0 \\ 0 \\ -g\tilde{A} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2(\widetilde{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} \Psi(\widetilde{\mathbf{W}}) \\ 0 \\ -g\tilde{A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3(\widetilde{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}(\tilde{S}) \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$r_4(\widetilde{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tilde{u} - c(\widetilde{\mathbf{W}}) \end{pmatrix}, \quad r_5(\widetilde{\mathbf{W}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tilde{u} + c(\widetilde{\mathbf{W}}) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

La matrice de passage P associée à la base $(r_1(\widetilde{\mathbf{W}}), r_2(\widetilde{\mathbf{W}}), r_3(\widetilde{\mathbf{W}}), r_4(\widetilde{\mathbf{W}}), r_5(\widetilde{\mathbf{W}}))$ a pour inverse :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c(\widetilde{\mathbf{W}})^2 - \tilde{u}^2} & \frac{\mathcal{H}(\tilde{S})}{c(\widetilde{\mathbf{W}})^2 - \tilde{u}^2} & \frac{\Psi(\widetilde{\mathbf{W}})}{c(\widetilde{\mathbf{W}})^2 - \tilde{u}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{g\tilde{A}} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ g\tilde{A} & g\tilde{A}\tilde{S} & g\tilde{A}\Psi(\widetilde{\mathbf{W}}) & \frac{\tilde{u} + c(\widetilde{\mathbf{W}})}{2c(\widetilde{\mathbf{W}})} & -\frac{1}{2c(\widetilde{\mathbf{W}})} \\ \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})(c(\widetilde{\mathbf{W}}) - \tilde{u})}{g\tilde{A}} & \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})(c(\widetilde{\mathbf{W}}) - \tilde{u})}{g\tilde{A}\tilde{S}} & \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})(c(\widetilde{\mathbf{W}}) - \tilde{u})}{g\tilde{A}\Psi(\widetilde{\mathbf{W}})} & \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})}{c(\widetilde{\mathbf{W}}) - \tilde{u}} & \frac{1}{2c(\widetilde{\mathbf{W}})} \\ \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})(c(\widetilde{\mathbf{W}}) + \tilde{u})}{g\tilde{A}} & \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})(c(\widetilde{\mathbf{W}}) + \tilde{u})}{g\tilde{A}\tilde{S}} & \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})(c(\widetilde{\mathbf{W}}) + \tilde{u})}{g\tilde{A}\Psi(\widetilde{\mathbf{W}})} & \frac{2c(\widetilde{\mathbf{W}})}{c(\widetilde{\mathbf{W}}) + \tilde{u}} & \frac{1}{2c(\widetilde{\mathbf{W}})} \end{pmatrix}$$

La solution du problème de Riemann (2.12) est formée de quatre états constants connectés par des chocs se propageant suivant les droites $\xi = x/t = \lambda_i$. En notant $[\mathbf{W}] = \mathbf{W}_r - \mathbf{W}_l$, le saut correspondant au vecteur propre r_i est égal à $(P^{-1}[\mathbf{W}])_i r_i$. En particulier, le débit Q reste

continu à travers la droite $\xi = 0$ puisque la cinquième composante des vecteurs r_1 , r_2 et r_3 est nulle. Ce qui traduit, la conservation de la quantité A .

Rappelons qu'on cherche les états de part et d'autre de la droite $\xi = 0$. Les valeurs de Z , $\cos \theta$ et S étant connues, on cherche plus précisément les valeurs de A et Q que l'on note (AM, QM) et (AP, QP) (c.f. FIG. 2.4) de part et d'autre de l'interface. D'après la remarque précédente, on a immédiatement $QM = QP$. On note dans la suite QMP cette valeur commune.

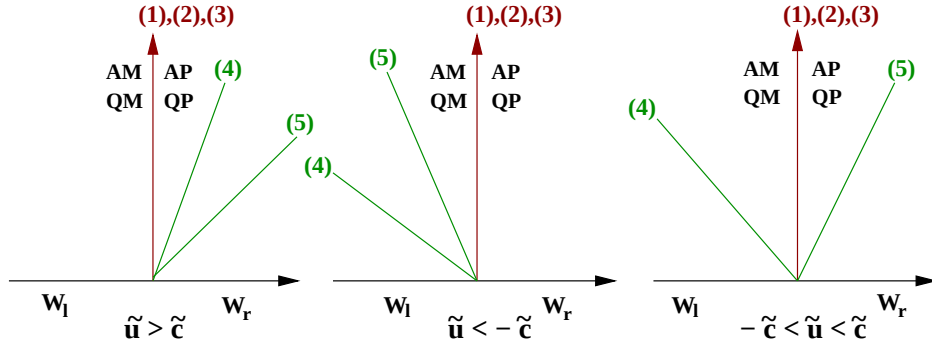


FIGURE 2.4 – Solution du problème de Riemann (2.12). Les numéros (i) correspondent aux droites caractéristiques $x/t = \lambda_i$, pour $i = 1, \dots, 5$.

Les états aux interfaces sont alors obtenus comme suit :

cas d'un d'écoulement torrentiel vers l'aval (i.e $\tilde{u} > c(\tilde{\mathbf{W}})$) :

On a immédiatement $AM = A_l$ et $QMP = Q_l$. La quatrième composante des vecteurs r_2 et r_3 étant nulle, seule la caractéristique numéro 1 nous renseigne sur le saut de A à travers la droite $\xi = 0$. En particulier, il est égal à la quatrième ligne du vecteur $(P^{-1}[\mathbf{W}])_1 r_1$. On a donc :

$$\begin{aligned} AM &= A_l \\ QMP &= Q_l \\ AP &= AM + \frac{g\tilde{A}}{c(\tilde{\mathbf{W}})^2 - \tilde{u}^2} \psi_l^r \end{aligned} \quad (2.15)$$

où ψ_l^r représente les termes sources décentrés :

$$Z_r - Z_l + \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{S}})(\cos \theta_r - \cos \theta_l) + \Psi(\tilde{\mathbf{W}})(S_r - S_l). \quad (2.16)$$

Remarque 2.2.4. Le terme de friction peut être aussi décentré aux interfaces. On l'écrit sous la forme :

$$\partial_x \int_{x_0}^x K(s, \mathbf{S}) \frac{Q(t, s) |Q(t, s)|}{A^2(t, s)} ds.$$

(pour x_0 arbitraire). On introduit la terminologie pente statique pour le terme $\frac{dZ(x)}{dx}$ et pente dynamique pour :

$$\frac{d}{dx} \left(Z + \int_x K(s, \mathbf{S}) \frac{Q(t, s) |Q(t, s)|}{A^2(t, s)} ds \right) \quad (2.17)$$

qu'on note encore $\frac{dZ(x)}{dx}$ par commodité. Ainsi, décentrer ce terme revient à écrire : $Z_{i+1} - Z_i$, i.e. :

$$Z_{i+1} - Z_i + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \frac{1}{K_s^2} \left\{ \frac{Q |Q|}{A^2 R_h(\mathbf{S})^{4/3}} \right\} ds + \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \frac{1}{K_s^2} \left\{ \frac{Q |Q|}{A^2 R_h(\mathbf{S})^{4/3}} \right\} ds.$$

En se rappelant que $A = A_i$, $Q = Q_i$, $S = S_i$ sont constants sur la maille m_i , on obtient :

$$Z_{i+1} - Z_i + (x_{i+1/2} - x_i) \frac{Q_i |Q_i|}{K_s^2 A_i^2 R_h(\mathbf{S}_i)^{4/3}} + (x_{i+1} - x_{i+1/2}) \frac{Q_{i+1} |Q_{i+1}|}{K_s^2 A_{i+1}^2 R_h(\mathbf{S}_{i+1})^{4/3}}$$

qui permet de prendre en compte la demi contribution de la friction agissant sur les mailles « mitoyenne » d'interface $x_{i+1/2}$. Quitte à écrire le flux numérique fonction de x et de W pour lequel $\frac{dZ}{dx}$ est la pente dynamique, le flux est encore consistant.

cas d'un d'écoulement torrentiel vers l'amont (i.e $\tilde{u} < c(\tilde{\mathbf{W}})$) :

Cette fois $AP = A_r$ et $QMP = Q_r$. De la même manière que dans le cas précédent, on obtient le saut de A à travers la caractéristique $\xi = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} AM &= AP - \frac{g\tilde{A}}{c(\tilde{\mathbf{W}})^2 - \tilde{u}^2} \psi_l^r \\ QMP &= Q_r \\ AP &= A_r \end{aligned} \quad (2.18)$$

où ψ_l^r est donné par (2.16).

cas d'un d'écoulement fluvial (i.e $|\tilde{u}| < c(\tilde{\mathbf{W}})$) :

On connecte l'état (AM, QMP) à l'état gauche (A_l, Q_l) par un saut à travers la ligne $\xi = \lambda_4$, en utilisant la quatrième et cinquième ligne du vecteur $(P^{-1}[\mathbf{W}])_4 r_4$. AP est donnée par (2.15). On a donc :

$$\begin{aligned} AM &= A_l + \frac{g\tilde{A}}{2c(\tilde{\mathbf{W}})(c(\tilde{\mathbf{W}}) - \tilde{u})} \psi_l^r + \frac{\tilde{u} + c(\tilde{\mathbf{W}})}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} (A_r - A_l) - \frac{1}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} (Q_r - Q_l) \\ QM &= QP = Q_l - \frac{g\tilde{A}}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} \psi_l^r + \frac{\tilde{u}^2 - c(\tilde{\mathbf{W}})^2}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} (A_r - A_l) - \frac{\tilde{u} - c(\tilde{\mathbf{W}})}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} (Q_r - Q_l) \\ AP &= AM + \frac{g\tilde{A}}{\tilde{u}^2 - c(\tilde{\mathbf{W}})^2} \psi_l^r \end{aligned} \quad (2.19)$$

où ψ_l^r est donné par (2.16).

2.2.3 Le problème de Riemann linéarisé avec point de transition : approche « onde fantôme »

On présente une manière de traiter le problème de Riemann linéarisé lorsque l'interface est SL/CH ou CH/SL en introduisant la méthode de l'onde fantôme [18].

Dans le cas d'un point de transition, l'interface est assimilée à une frontière libre, correspondant à une discontinuité du gradient de pression. Par conséquent, la résolution du problème de Riemann (2.12) fait intervenir une matrice de convection discontinue. Supposant que l'interface se propage à vitesse w , supposée constante sur un pas de temps, la demi-droite $x = wt$, trajectoire de l'interface, est la ligne de discontinuité de la matrice $\tilde{D}(W_l, W_r)$.

On introduit alors un état à gauche $\mathbf{U}^- = (A^-, Q^-)$ et un état à droite $\mathbf{U}^+ = (A^+, Q^+)$ de la

ligne $x = wt$ en écrivant $w = \frac{Q^+ - Q^-}{A^+ - A^-}$, donné par la relation de saut de Rankine-Hugoniot sur l'équation de la conservation de la masse. Les états $\mathbf{U}_l$ et $\mathbf{U}^-$ (resp. $\mathbf{U}_r$ et $\mathbf{U}^+$) sont de même nature (i.e SL et SL ou CH et CH) : voir les figures 2.5-2.6.

On peut donc définir, sans ambiguïté, les matrices moyennes de part et d'autre de $\xi = \frac{x}{t} = w$ comme suit :

- pour $x < wt$, on pose $\tilde{D}_l = \tilde{D}(\mathbf{W}_l, \mathbf{W}_r) = D(\tilde{\mathbf{W}}_l)$ où $\tilde{\mathbf{W}}_l$ est une approximation « bien choisie » faisant intervenir l'état gauche $\mathbf{W}_l$ et l'état droit $\mathbf{W}^-$ (c.f. remarque 2.2.3).
- pour $x > wt$, on pose $\tilde{D}_r = \tilde{D}(\mathbf{W}_l, \mathbf{W}_r) = D(\tilde{\mathbf{W}}_r)$ où $\tilde{\mathbf{W}}_r$ est une approximation « bien choisie » faisant intervenir l'état gauche $\mathbf{W}^+$ et l'état droit $\mathbf{W}_r$ (c.f. remarque 2.2.3).

On est donc amené à résoudre deux problèmes de Riemann : on applique la procédure générale décrite dans la section précédente et on utilise les conditions de saut de Rankine-Hugoniot à travers l'interface $x = wt$, à savoir

$$Q^+ - Q^- = w(A^+ - A^-) \quad (2.20)$$

$$F_5(A^+, Q^+) - F_5(A^-, Q^-) = w(Q^+ - Q^-) \quad (2.21)$$

où $F_5(A, Q) = \frac{Q^2}{A} + p(x, A)$ (par souci de simplicité, la dépendance par rapport à l'état ne figure pas). Formellement, les inconnus sont donc $\mathbf{U}^-$, $\mathbf{U}^+$, $\mathbf{UM}$, $\mathbf{UP}$ et w . Cependant, le problème se ramène à la détermination de $\mathbf{U}^-$ et $\mathbf{U}^+$ comme on va le montrer.

Selon la nature de $(\mathbf{U}^-, \mathbf{UM})$, $(\mathbf{U}^+, \mathbf{UP})$ à l'interface $x_{i+1/2}$ et du signe de w , on doit distinguer quatre cas :

- Montée en charge vers l'aval (c.f. FIG. 2.5),
- Montée en charge vers l'amont,
- Descente à surface libre vers l'aval (c.f. FIG. 2.6),
- Descente à surface libre vers l'amont.

On peut distinguer deux couples de « cas jumeaux » : montée en charge (vers l'aval ou vers l'amont) et descente à surface libre (vers l'aval ou vers l'amont). En particulier, on ne traite que le cas d'une montée en charge vers l'aval et d'une descente à surface libre vers l'aval.

Les états $\mathbf{U}_l$ et $\mathbf{U}_r$ étant connus, on définit $w_{pred} = \frac{Q_r - Q_l}{A_r - A_l}$ pour prédire le sens de déplacement de l'interface.

2.2.3.1 Montée en charge vers l'aval

La vitesse de transition de prédiction w_{pred} étant positive et la maille à gauche étant en charge et celle de droite à surface libre, l'interface se déplace vers l'aval : c'est le cas de figure représenté à la figure 2.5.

Suivant Song [97] (voir aussi [48]), les vitesses caractéristiques satisfont l'inégalité :

$$\tilde{u}_r + c(\tilde{\mathbf{W}})_r < w < \tilde{u}_l + c.$$

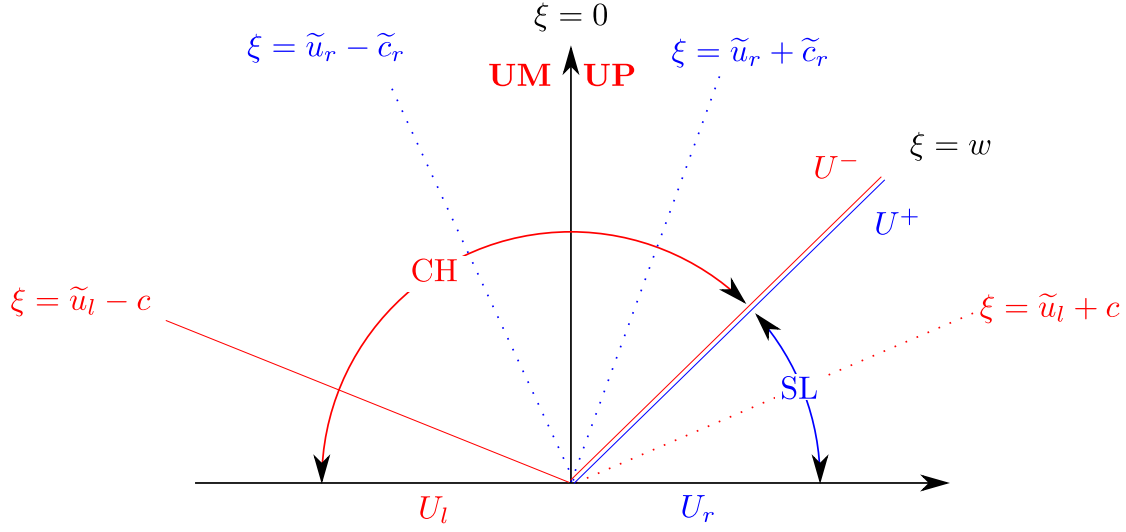


FIGURE 2.5 – Montée en charge vers l'aval

L'approche « onde fantôme » consiste à ne prendre en considération que les caractéristiques en trait plein. Les lignes en pointillés, appelées « ondes fantômes », sont ignorées car elle sont dans des zones de nature différente (par exemple la ligne $\xi = \tilde{u}_l - c$, provenant d'un état en charge, est dans une zone à surface libre, voir FIG. 2.5).

Ainsi, $\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}_r$ et $\mathbf{U}_l$, $\mathbf{U}^-$ sont connectés par un saut à travers la demi droite $\xi = 0$ et $\xi = \tilde{u}_l - c$. Éliminant w dans les relations de saut de Rankine-Hugoniot (2.20)-(2.21), on obtient $\mathbf{U}^-$ comme la solution du système non-linéaire :

$$(F_5(A_r, Q_r) - F_5(A^-, Q^-)) = \frac{(Q_r - Q^-)^2}{(A_r - A^-)} \quad (2.22)$$

$$Q^- - Q_l - (A^- - A_l)(\tilde{u}_l - c) + \frac{g\psi_l^r \tilde{A}_l}{c + \tilde{u}_l} = 0 \quad (2.23)$$

On a enfin, $\mathbf{UP} = \mathbf{U}^-$ et la relation de saut à travers l'interface $\xi = 0$ donne AM . On a donc :

$$\begin{cases} AP &= A^- \\ QM &= Q^- \\ QP &= Q^- \\ AM &= AP - \frac{g \tilde{A}_l \psi_l^r}{\tilde{u}_l^2 - c^2}. \end{cases}$$

2.2.3.2 Descente à surface libre vers l'aval

La vitesse de transition de prédiction w_{pred} étant positive et la maille à gauche étant en surface libre et celle de droite en charge, l'interface se déplace vers l'aval : c'est le cas de figure représenté à la figure 2.6.

Suivant Song [97] (voir aussi [48]), les vitesses caractéristiques satisfont l'inégalité :

$$\tilde{u}_l + c(\tilde{\mathbf{W}})_l < w < \tilde{u}_r + c$$

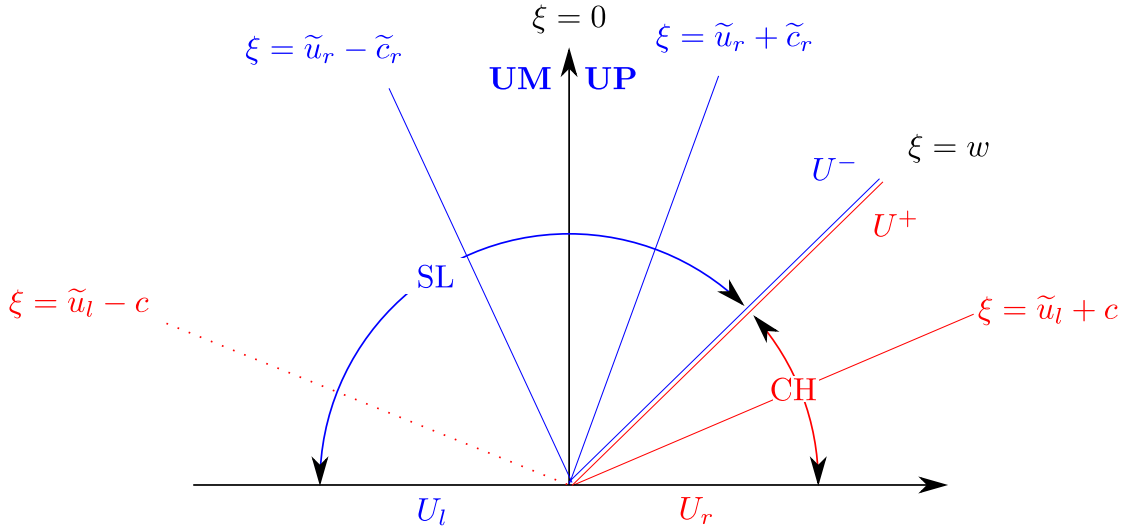


FIGURE 2.6 – Descente à surface libre vers l'aval

Il y a deux caractéristiques dans la zone à surface libre : $-\infty < \xi < w$ (en fait, trois en comptant la demi-droite $\xi = 0$). Elles permettent de relier l'état $\mathbf{U}_l$ à l'état $\mathbf{UM}$. Ainsi, seulement la demi-droite $\xi = \tilde{u}_r + c$ donne une information (c'est l'équation (2.24) ci-dessous). Une deuxième équation provient des relations de saut de Rankine-Hugoniot (2.20)-(2.21) à travers l'interface $\xi = w$ en éliminant w comme précédemment (c'est l'équation (2.25) ci-dessous). Il manque donc deux équations pour fermer le système à quatre inconnus (A^- , Q^- , A^+ , Q^+). À cet effet, on utilise en premier lieu, une relation de saut à travers l'interface $\xi = w$ pour l'énergie à partir de l'équation (1.95) :

$$\Psi^+ - \Psi^- = w(u^+ - u^-)$$

où Ψ est la *charge totale* définie par

$$\Psi = \frac{u^2}{2} + c^2 \ln \left(\frac{A}{S} \right) + g \mathcal{H}(S) \cos \theta + g Z.$$

En second lieu, nous imposons

$$w = w_{pred} \text{ avec } w_{pred} = \frac{Q_r - Q_l}{A_r - A_l}.$$

Par conséquent, (A^-, Q^-, A^+, Q^+) est solution du système non-linéaire suivant :

$$(Q_r - Q^+) = (A_r - A^+) (\tilde{u}_r + c) \quad (2.24)$$

$$(Q^+ - Q^-) (Q_r - Q_l) = (A_r - A_l) (F_2(A^+, Q^+) - F_2(A^-, Q^-)) \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{(Q^+)^2}{2(A^+)^2} + c^2 \ln(A^+) + g \cos \theta \mathcal{H}(A^+) - \frac{(Q^-)^2}{2(A^-)^2} - c^2 \ln(A^-) - g \cos \theta \mathcal{H}(A^-) \\ = \frac{Q_r - Q_l}{A_r - A_l} \left(\frac{Q^+}{A^+} - \frac{Q^-}{A^-} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$(Q_r - Q_l) (A^+ - A^-) = (Q^+ - Q^-) (A_r - A_l) \quad (2.27)$$

Enfin, les états **UM** et **UP** se déterminent comme dans un écoulement fluvial avec les états $\mathbf{U}_g$ et $\mathbf{U}^-$ comme états gauche et droit :

$$\begin{aligned} AM &= A_l + \frac{g \tilde{A}_l \psi_l^r}{2 c(\tilde{\mathbf{W}})_l (c(\tilde{\mathbf{W}})_l - \tilde{u}_l)} + \frac{\tilde{u}_l + c(\tilde{\mathbf{W}})_l}{2 c(\tilde{\mathbf{W}})_l} (A^- - A_l) - \frac{1}{2 c(\tilde{\mathbf{W}})_l} (Q^- - Q_l) \\ AP &= AM + \frac{g \tilde{A}_l \psi_l^r}{\tilde{u}_l^2 - c(\tilde{\mathbf{W}})_l^2} \\ QMP &= Q_l + \frac{g \tilde{A}_l \psi_l^r}{2 c(\tilde{\mathbf{W}})_l} + \frac{\tilde{u}_l^2 - c(\tilde{\mathbf{W}})_l^2}{2 c(\tilde{\mathbf{W}})_l} (A^- - A_l) - \frac{\tilde{u}_l - c(\tilde{\mathbf{W}})_l}{2 c(\tilde{\mathbf{W}})_l} (Q^- - Q_l) \end{aligned}$$

2.2.4 Condition CFL et suivi de l'état d'une maille

Dès que l'état aux interfaces $\mathbf{W}_{i\pm 1/2}^*(0^\pm, \mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$ est complètement déterminé (par l'approche décrite dans la Section 2.2.2 ou la Section 2.2.3) le schéma numérique (2.9) s'écrit explicitement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_i^{n+1} &= A_i^n - \frac{\Delta t^n}{h_i} (QMP_{i+1/2} - QMP_{i-1/2}), \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^n - \frac{\Delta t^n}{h_i} (F_5(AM_{i+1/2}, QMP_{i+1/2}) - F_5(AM_{i-1/2}, QMP_{i-1/2})) \\ &\quad + g \frac{Q_i^n |Q_i^n|}{A_i^n K_s^2 R_h(A_i^n)^{4/3}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le pas de temps, à l'instant t^n , est classiquement soumis à une condition de stabilité de type CFL :

$$\Delta t^n = \alpha \frac{\inf_{i \in \mathbb{Z}} h_i}{\max_{i \in \mathbb{Z}} \left\{ \tilde{\lambda}_{4,i+1/2}^n, \tilde{\lambda}_{5,i+1/2}^n \right\}} \text{ pour } 0 < \alpha < 1 \quad (2.29)$$

où $\tilde{\lambda}_{k,i+1/2}$ est la k -ème valeur propre de la matrice $\tilde{D}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_{i+1})$.

Étant donné A_i^n d'état E_i^n ($= 0$ ou à 1 selon si la maille i est à surface libre ou en charge) et A_i^{n+1} (donné par le schéma (2.28)), on détermine l'état d'une maille i au temps t^{n+1} en appliquant le procédé algorithmique suivant (issu de [19]) :

- si $E_i^n = 0$ alors
 - si $A_i^{n+1} < S_i$ alors $E_i^{n+1} = 0$,
 - si $A_i^{n+1} \geq S_i$ alors $E_i^{n+1} = 1$.
- si $E_i^n = 1$ alors
 - si $A_i^{n+1} < S_i$ alors $E_i^{n+1} = E_{i-1}^n E_{i+1}^n$,
 - si $A_i^{n+1} \geq S_i$ alors $E_i^{n+1} = 1$.

La première partie de cet algorithme est claire et signifie simplement que si la maille numéro i était à surface libre alors au temps t_{n+1} soit elle le reste (puisque $A_i^{n+1} < S_i$), soit elle passe en charge. Dans la deuxième partie, si la maille i était en charge alors on interdit le passage à surface libre lorsque les deux mailles adjacentes sont en charge (correspond au cas **JAMAIS** de la figure 2.7) : c'est la condition $E_i^{n+1} = E_{i-1}^n E_{i+1}^n$. Physiquement, si cette situation devait se produire, elle serait provoquée par la création d'une poche d'air, (par exemple, engendré par la cavitation ; voir la Partie III - Chapitre 4 à ce sujet) ou une entrée d'air dans le dispositif due à une cheminée d'équilibre (constituée par un réservoir en contact avec la surface libre permettant de réduire les effets du coup de bélier).

Remarque 2.2.5. Par ailleurs, le critère $E_i^{n+1} = E_{i-1}^n E_{i+1}^n$ permet de prendre en compte le phénomène de dépression correspondant à la situation : une maille i est en dépression si $A_i^{n+1} < S_i$ et $E_i^{n+1} = 1$. C'est un critère numérique de dépression qui correspond à la physique du problème mais qui écarte le phénomène d'aspiration (i.e un état à surface libre et en dépression) dû à ce dernier. En effet, cette approche permet de décrire une zone en dépression comme un ensemble connexe inclut strictement dans une zone en surpression (c.f. FIG. 2.8). En terme de quantité d'eau physique S (précédemment introduite dans le Chapitre 1 par (1.88)), une dépression est donnée par $S = S$ et $A < S$. Les autres cas correspondant à un écoulement à surface libre, i.e. $S = A$ et un écoulement en surpression pour $S = S$ et $A > S$. Dans la figure 2.8, on imagine une situation de dépression observée à différents temps. On trace le profil de la vitesse d'interface de transition w dans le plan (x, t) ainsi que le graphe de la fonction $\frac{A}{S}$ au temps $t = t_3$ ou se produit la dépression.

Dans le cas de la prise en compte de conditions aux limites, le schéma numérique détermine U_i^{n+1} uniquement dans les mailles internes, i.e. pour les indices $1 \leq i \leq N$. Pour ces derniers, le suivi des mailles étant obtenus par l'algorithme présenté ci-dessus. Le cas du traitement des conditions aux limites « réelles » fait l'objet de la section suivante.

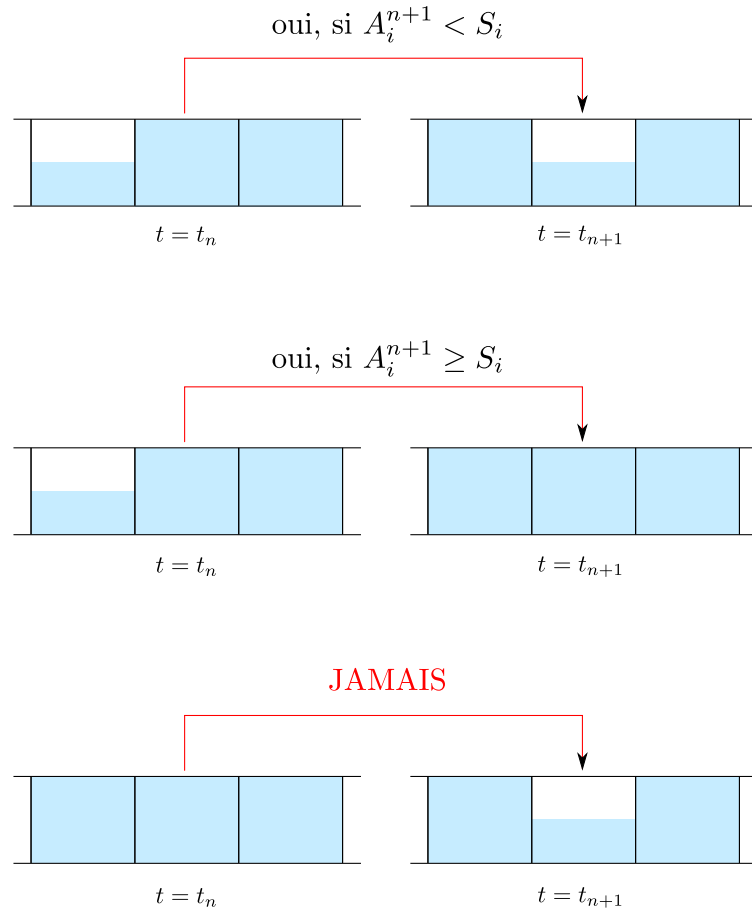
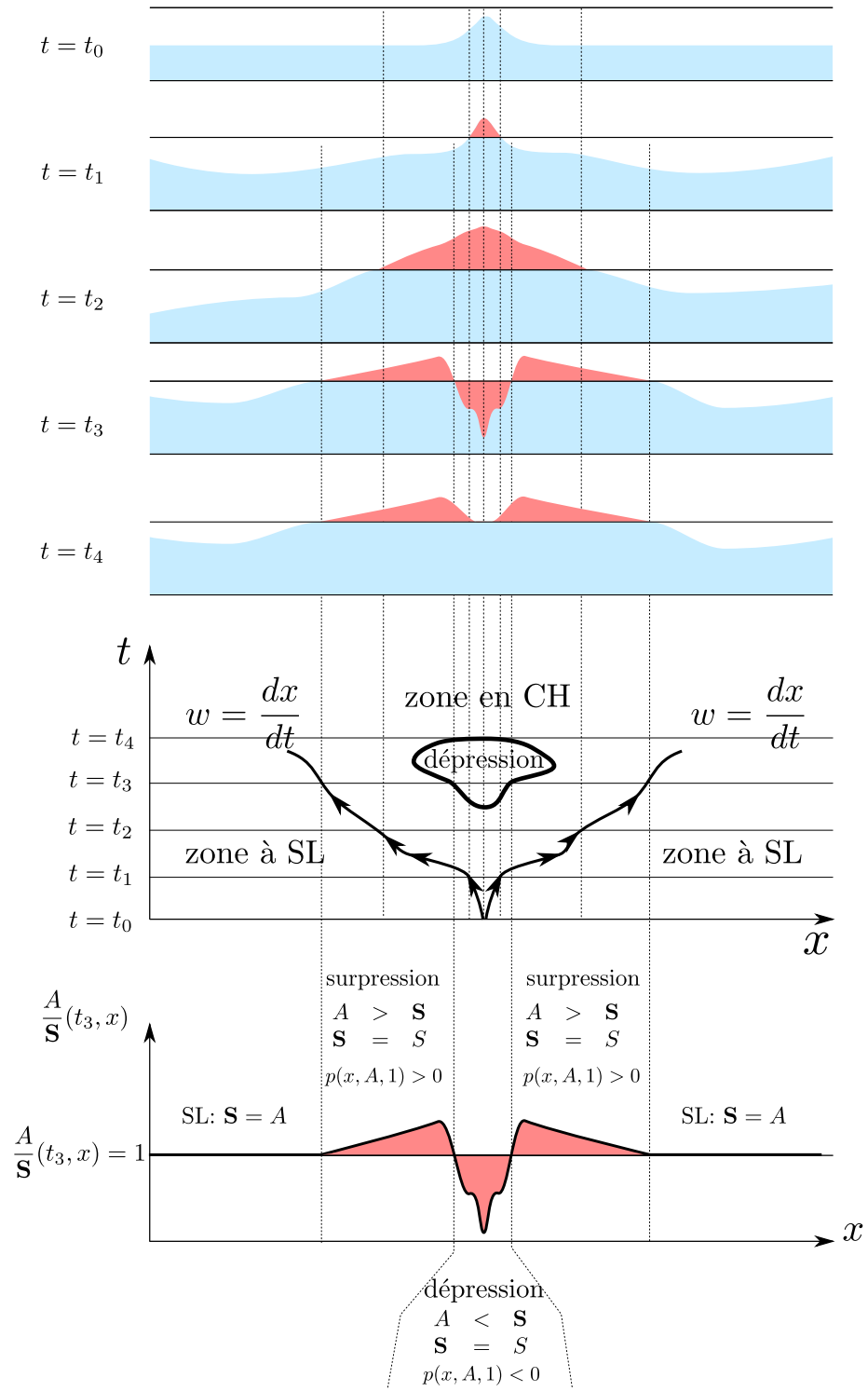


FIGURE 2.7 – Suivi de l'état d'une maille

FIGURE 2.8 – $\frac{A}{S}$: un indicateur de dépression

2.2.5 Traitement des conditions aux limites

Soit un temps t^n donné. On suppose que les quantités au temps t^n , amont, interne et aval, $(\mathbf{U}_i^n, E_i^n)_{0 \leq i \leq N+1}$ ainsi que $(\mathbf{U}_i^{n+1}, E_i^{n+1})_{1 \leq i \leq N}$ sont connues. On rappelle que les indices 0 et $N+1$ sont utilisés pour représenter les inconnues, respectivement, aux mailles fictives amont et aval d'abscisse $x_{1/2}$ et $x_{N+1/2}$. Les inconnues sont $(\mathbf{U}_0^{n+1}, E_0^{n+1})$ à l'amont et $(\mathbf{U}_{N+1}^{n+1}, E_{N+1}^{n+1})$ à l'aval. Pour cela, il faut imposer autant de conditions qu'il y a de « caractéristique rentrante ». Ainsi, dans le cas de la maille fictive amont, en supposant que E_0^{n+1} est connu, la stratégie est la suivante :

- si l'écoulement est torrentiel vers l'aval (i.e torrentiel entrant : $\tilde{u} > c(\tilde{\mathbf{W}})$), on doit imposer deux conditions aux limites. Si seulement une des deux est donnée, on impose par défaut un état critique : $u_0 = c(\mathbf{W}_0)$ pour compléter.

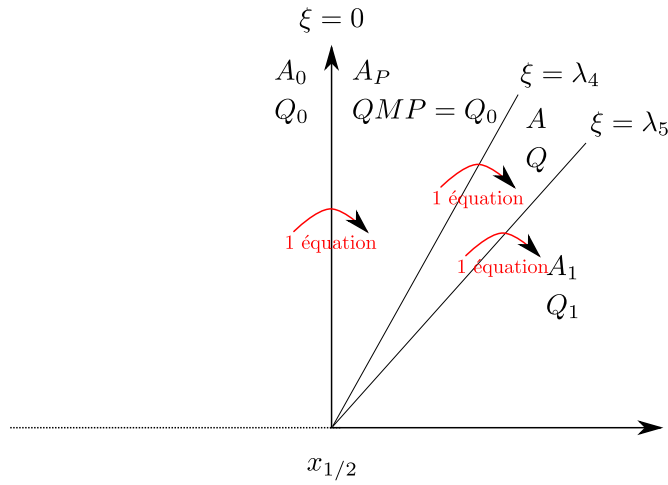


FIGURE 2.9 – Conditions aux limites amont : écoulement torrentiel entrant

- si l'écoulement est torrentiel vers l'amont (i.e torrentiel sortant : $\tilde{u} < -c(\tilde{\mathbf{W}})$), on impose une condition de sortie libre $A_0 = A_1 \frac{S_0}{S_1}$ et $Q_0 = Q_1$,

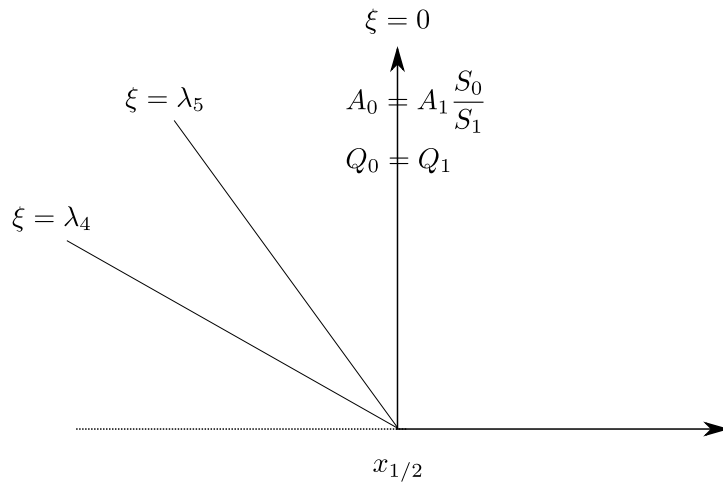


FIGURE 2.10 – Conditions aux limites amont : écoulement torrentiel sortant

- si l'écoulement est fluvial, connaissant l'une des composantes de $\mathbf{U}_0$ est connue (ou une relation $f_{am}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1) = 0$), on adjoint une équation traduisant (le débit Q ou l'aire mouillée A , via la hauteur piézométrique) que le saut à travers la caractéristique sortante est nul.

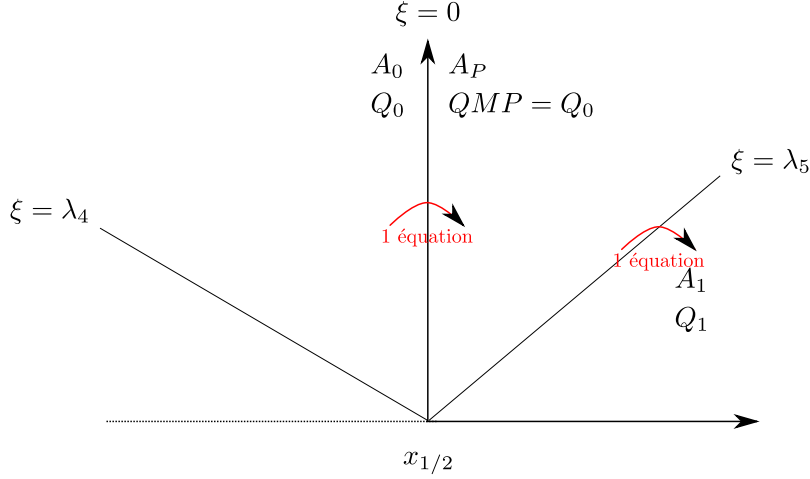


FIGURE 2.11 – Conditions aux limites amont : écoulement fluvial

Remarque 2.2.6. Par symétrie, on impose des conditions similaires à l'aval.

Puisque le régime fluvial est le seul pour lequel nous disposons d'une condition aux limites « réelle » (voir le paragraphe suivant), on raisonne par *a priori*. On calcule les inconnues dans le cas d'un écoulement fluvial puis on vérifie la validité de l'hypothèse en calculant la vitesse d'onde. Si celle-ci est incompatible avec l'hypothèse d'écoulement fluvial, alors on bascule soit vers

- un écoulement torrentiel entrant et on impose un état critique (pour compléter la donnée manquante),
- un écoulement torrentiel sortant et on impose une sortie libre.

Comme dans la méthode de suivi d'interface développée dans les Sections 2.2.2 et 2.2.3, le traitement des conditions aux limites dépendra de six types d'interfaces : SL/SL, CH/CH, SL/CH avec $w > 0$, SL/CH avec $w < 0$, CH/SL avec $w > 0$ et CH/SL avec $w < 0$. Dans la suite, on traite seulement le cas du problème à l'amont (le cas aval étant symétrique) et on suppose que les états E sont provisoirement connus. De plus, on omettra l'indice supérieur $n + 1$ quand aucune confusion n'est possible.

2.2.5.1 Pas de point de transition localisé à l'amont

On suppose qu'à l'instant t^{n+1} l'état E_0 est égale à E_1 et que l'écoulement est fluvial. Dans ce cas, compte tenu de ce qui a été dit précédemment, on suppose que soit A_0 ou soit Q_0 ou encore $\mathbf{U}_0$ est donné par une relation de la forme $f(\mathbf{W}_0) = 0$ avec $\mathbf{W}_0 = (Z_0, \cos \theta_0, S_0, A_0, Q_0)^t$. C'est généralement la dernière approche qui est considérée, car elle est plus proche des conditions aux limites « réelles ». En effet, on impose généralement une condition au limite dite « réelle » du type :

1. la hauteur piézométrique $H(t)$:

$$\forall t, \quad c^2 \ln \left(\frac{A_0(t)}{S_0(t)} \right) + g\mathcal{H}(\mathbf{S}_0(t)) \cos \theta_0 + gZ_0 = H(t) \quad (2.30)$$

2. le débit $q(t)$:

$$\forall t, \quad Q_0(t) = q(t) \quad (2.31)$$

3. la charge totale $\Psi_c(t)$:

$$\forall t, \quad \frac{Q_0^2(t)}{2A_0(t)} + c^2 \ln \left(\frac{A_0(t)}{S_0(t)} \right) + g\mathcal{H}(S_0(t)) \cos \theta_0 + gZ_0 = \Psi_c(t) \quad (2.32)$$

Le nombre d'inconnues étant de deux, il convient d'adjoindre une relation, pour fermer le système, traduisant le fait que le saut à travers la caractéristique sortante est nulle. En d'autre termes, on écrit la décomposition de $\mathbf{W}_0$ et $\mathbf{W}_1$ dans la base de vecteurs propres à droites associés à la matrice de convection $\tilde{D}(\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1)$ (c.f. section 2.2.2) et on pose $\alpha_4 = \beta_4$ où α_i et β_i sont, respectivement, les coefficients de $\mathbf{W}_0$ et $\mathbf{W}_1$ dans cette base $\{r_1(\tilde{\mathbf{W}}), r_2(\tilde{\mathbf{W}}), r_3(\tilde{\mathbf{W}}), r_4(\tilde{\mathbf{W}}), r_5(\tilde{\mathbf{W}})\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_i(\tilde{\mathbf{W}}), \\ \mathbf{W}_1 &= \sum_{i=1}^5 \beta_i r_i(\tilde{\mathbf{W}}) \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{Z}, \widetilde{\cos \theta}, \tilde{S}, \tilde{A}, \tilde{Q})^t$ dépend de $\mathbf{W}_0$ et $\mathbf{W}_1$. D'après (2.13)-(2.14), on en tire immédiatement :

$$\alpha_2 = -\frac{S_0}{g\tilde{A}}, \quad \alpha_3 = -\cos \theta_0$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{c(\tilde{\mathbf{W}})^2 - \tilde{u}^2} \left(Z_0 - \alpha_2 \Psi(\tilde{\mathbf{W}}) - \alpha_3 \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{S}}) \right)$$

et le système linéaire à deux équations et à deux inconnues (α_4, α_5) :

$$\begin{cases} A_0 + g\tilde{A}\alpha_1 &= \alpha_4 + \alpha_5, \\ Q_0 &= \alpha_4(\tilde{u} - c(\tilde{\mathbf{W}})) + \alpha_5(\tilde{u} + c(\tilde{\mathbf{W}})) \end{cases}$$

donne :

$$\alpha_4 = \frac{1}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} \left((A_0 + g\tilde{A}\alpha_1)(\tilde{u} + c(\tilde{\mathbf{W}})) - Q_0 \right).$$

De même, on obtient :

$$\beta_4 = \frac{1}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} \left((A_1 + g\tilde{A}\beta_1)(\tilde{u} + c(\tilde{\mathbf{W}})) - Q_1 \right).$$

Ainsi, en traduisant le fait que le saut à travers la caractéristique sortante est nulle, i.e. $\alpha_4 = \beta_4$, on trouve l'équation :

$$Q_1 - Q_0 = \left((A_1 - A_0) + g\tilde{A}(\beta_1 - \alpha_1) \right) (\tilde{u} + c(\tilde{\mathbf{W}})). \quad (2.33)$$

En résumer, $\mathbf{U}_0$ doit satisfaire le système défini par la condition aux limites $f(\mathbf{W}_0) = 0$ (avec f défini par (2.30) ou (2.31) ou (2.32)) et l'équation (2.33).

Remarque 2.2.7. Pour obtenir la condition à l'aval, il suffit de remplacer les quantités indexées par 0 en N , et celle par 1 en $N + 1$.

Critère *a priori* pour prédire l'état de la maille à l'amont selon la condition imposée.

L'état de la maille fictive E_0^{n+1} est déterminé en fonction de la condition qu'on impose et de l'état de la maille numéro 1. On doit donc distinguer les cas SL/SL et CH/CH (les autres cas étant traités dans la section suivante).

- Dans le cas de la condition (2.30) et d'un état à surface libre dans la maille 1, l'état E_0^{n+1} est obtenu sans aucune ambiguïté en comparant A_0^{n+1} à S_0 . En particulier, on a E_0^{n+1} est déclaré à surface libre si $A_0^{n+1} < S_i$, sinon on est confronté à un point de transition (voir section suivante). Lorsque la première maille est en charge, par défaut on pose $E_0^{n+1} = 1$ (faute de critère) y compris si $A_0^{n+1} < S_0$.
- Lorsque la condition (2.31) est imposée, on prédit l'aire équivalente, à comparer à S_0 , pour déterminer l'état de la maille fictive. Dans cette perspective, on utilise une méthode de caractéristiques linéarisées. Pour cela, on écrit la solution du problème de Riemann linéarisé avec terme source :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \tilde{B} \partial_x \mathbf{U} = G_s(x, \mathbf{W}), \\ \mathbf{U}(x, t_n) = \begin{cases} \mathbf{U}_0^n & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_1^n & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où $\tilde{B}(\tilde{\mathbf{U}}) = D_{\mathbf{U}} \mathbf{F}(x, \tilde{\mathbf{U}})$ avec $\tilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}_0^n + \mathbf{U}_1^n}{2}$ et $G_s(\mathbf{W}) = TS(\mathbf{W}) - B(x, \mathbf{W}) \partial_x \mathbf{W}$ (voir la formulation 2.7)) contient tous les termes sources. On rappelle que $\mathbf{U} = (A, Q)$ et $\mathbf{W} = (Z, \cos \theta, S, \mathbf{U})$. Nous supposons dans le reste de cette section que les termes sources sont réduits à un terme de la forme $g A \partial_x j(x, A)$ et au terme de friction $\frac{g}{K_s^2 R_h(A)^{4/3}} \frac{Q |Q|}{A}$ (introduit précédemment).

Les valeurs propres associées à la matrice $\tilde{B}$:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - c(\tilde{\mathbf{W}}) \text{ et } \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u} + c(\tilde{\mathbf{W}})$$

où $c(\tilde{\mathbf{W}})$ est soit la vitesse du son à surface, soit la vitesse d'onde en charge. Les vecteurs propres droits sont

$$\tilde{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}.$$

En décomposant $\mathbf{U}$ dans la base de vecteurs propres, $\mathbf{U} = \alpha_1 \tilde{r}_1 + \alpha_2 \tilde{r}_2$ et en posant $G(\mathbf{W}) = \beta_1 \tilde{r}_1 + \beta_2 \tilde{r}_2$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \tilde{B} \partial_x \mathbf{U} &= (\partial_t \alpha_1 + \tilde{\lambda}_1 \partial_x \alpha_1) \tilde{r}_1 + (\partial_t \alpha_2 + \tilde{\lambda}_2 \partial_x \alpha_2) \tilde{r}_2 \\ &= \beta_1 \tilde{r}_1 + \beta_2 \tilde{r}_2 \end{aligned}$$

et en particulier,

$$\partial_t \alpha_1 + \tilde{\lambda}_1 \partial_x \alpha_1 = \beta_1.$$

Donc, en intégrant cette équation le long de la caractéristique,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_1(t, x(t)) &= \beta_1(t, x(t)), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ \alpha_1(t_n, x(t_n)) &= \alpha_1^n(\mathbf{U}_1^n), \end{aligned}$$

aboutissant au point $(x_{1/2}, t_{n+1})$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \tilde{\lambda}_1, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ x(t_{n+1}) &= x_{1/2} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\alpha_1 = \alpha_1(t_{n+1}, x_{1/2}) = \alpha_1(t_n, x(t_n)) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \beta_1(t, x(t)) dt \approx \alpha_1^n + \Delta t \beta_1^{n,n+1}$$

où α_1^n , $\beta_1^{n,n+1}$, α_1^{n+1} sont respectivement les composantes de $\mathbf{U}_1^n$, $G(\mathbf{W}_1^n)$ et $\mathbf{U}_0^{n+1}$ sur $\tilde{r}_1$. On a ainsi

$$\begin{aligned} A_0^{n+1} &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ Q_0^{n+1} &= \alpha_1 \tilde{\lambda}_1 + \alpha_2 \tilde{\lambda}_2, \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec

$$\alpha_1 = \alpha_1^n + \Delta t \beta_1^{n,n+1} \quad (2.35)$$

où le terme $\Delta t \beta_1^{n,n+1}$ est une approximation de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \beta_1(t, x(t)) dt$. Plus précisément, β_1 est la première composante du vecteur $P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ G_s \end{pmatrix}$, où P est la matrice de passage formée par les vecteurs r_1 et r_2 , i.e.

$$\beta_1 = \frac{1}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} \left(g A \partial_x j(x, A) + \frac{g}{K_s^2 R_h(A)^{4/3}} \frac{Q |Q|}{A} \right),$$

et on approche l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \beta_1(t, x(t)) dt$ par

$$\begin{aligned} & \frac{A(t_n, x(t_n)) + A(t_{n+1}, x(t_{n+1}))}{2} \left(j(x(t_{n+1}), A(t_{n+1}, x(t_{n+1}))) - j(x(t_n), A(t_n, x(t_n))) \right) \\ & + \frac{g}{K_s^2 R_h(A_1^n)^{4/3}} \frac{Q_1^n |Q_1^n|}{A_1^n} \\ & = \frac{A_1^n + A_0^{n+1}}{2} \left(j(x_{1/2}, A_0^{n+1}) - j(x(t_n), A_1^n) \right) + \frac{g}{K_s^2 R_h(A_1^n)^{4/3}} \frac{Q_1^n |Q_1^n|}{A_1^n} \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec $x(t_n) = -\tilde{\lambda}_1 \Delta t + x_{1/2}$. De même, en écrivant que α_1 est la première composante du vecteur $P^{-1} \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$, on a :

$$\alpha_1^n = \frac{-1}{2c(\tilde{\mathbf{W}})} (A_1^n \tilde{\lambda}_1 - Q_1^n). \quad (2.37)$$

L'aire de prédiction A_0^{n+1} est alors obtenue en résolvant l'équation (2.34).

2.2.5.2 Un point de transition est localisé à l'amont

On suppose qu'au temps t_n , E_0^n est différent de E_1^n . Les états amont, internes et aval étant tous connus au temps t_n , on prédit le sens de déplacement de l'interface par la vitesse de prédiction :

$$w_{pred} = \frac{Q_1^n - Q_0^n}{A_1^n - A_0^n}.$$

On a alors quatre cas de figures : SL/CH avec $w_{pred} > 0$ (SLCH+), SL/CH avec $w_{pred} < 0$ (SLCH-), CH/SL avec $w_{pred} > 0$ (CHSL+) et CH/SL avec $w_{pred} < 0$ (CHSL-). Il y a au plus sept inconnues : w , $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}^+$, $\mathbf{U}^-$, $\mathbf{U}^+$. En tenant compte de la vitesse w_{pred} , on prédit pour le cas

(**SLCH+**) un état à surface libre entrant pour la maille fictive à l'amont : $E_0^{n+1} = 0$,

(**SLCH-**) un état en charge libre sortant pour la maille fictive à l'amont : $E_0^{n+1} = 1$,

(**CHSL+**) un état en charge libre entrant pour la maille fictive à l'amont : $E_0^{n+1} = 1$,

(**CHSL-**) un état à surface libre sortant pour la maille fictive à l'amont : $E_0^{n+1} = 0$.

La stratégie consiste alors à traiter l'interface $x_{1/2}$ comme une maille interne en utilisant l'état gauche $\mathbf{U}_l = \mathbf{U}_0$ et droit $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}_1^{n+1}$ où $A_0 = A_0^n$ et Q_0^{n+1} est donné par (2.31), ou bien $Q_0 = Q_0^n$ et A_0^{n+1} est donnée par (2.30) ou on adjoint une équation supplémentaire, à un des systèmes obtenues dans la Section 2.2.3 (selon si (**SLCH+**), (**SLCH-**), (**CHSL+**) ou (**CHSL-**)), par (2.32).

2.2.6 Construction d'un schéma préservant les états stationnaires à vitesse nulle

Dans cette section, on construit un schéma bien équilibré préservant les états à vitesse nulle, à partir des équations (2.28) et d'une approximation judicieuse de la matrice de convection $\tilde{D}$ associée au problème de Riemann linéarisé (2.12) (c.f. Section 2.2.2). L'objectif de cette section est de montrer qu'on ne peut pas obtenir un schéma bien équilibré à partir d'un schéma VFRoe avec l'approximation moyenne standard (i.e. *matrice standard*, voir Remarque 2.2.3) qui consiste à choisir la matrice de convection $\tilde{D}$ (voir le problème de Riemann (2.12)) comme la matrice moyenne de la matrice Roe,

$$D_{Roe}(\mathbf{W}_l, \mathbf{W}_r) = \int_0^1 D(\mathbf{W}_r + (1-s)(\mathbf{W}_l - \mathbf{W}_r)) ds.$$

On a alors $\tilde{D} = D(\tilde{\mathbf{W}}) = D\left(\frac{\mathbf{W}_l + \mathbf{W}_r}{2}\right)$ et en particulier $\tilde{A} = \frac{A_l + A_r}{2}$. Nous verrons que c'est à cause d'une mauvaise approximation du terme $\tilde{A}$ que le schéma ne peut pas conserver les états d'équilibres à vitesse nulle.

À cet effet, on rappelle que les quantités A et Q sont mises à jour par le schéma numérique suivant :

$$A_i^{n+1} = A_i^n - \frac{\Delta t}{h_i} \left(QMP_{i+1/2}^n - QMP_{i-1/2}^n \right) \quad (2.38)$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{h_i} \left(F_5(AM_{i+1/2}^n, QMP_{i+1/2}^n) - F_5(AP_{i-1/2}^n, QMP_{i-1/2}^n) \right) \quad (2.39)$$

$F_5(A, Q) = \frac{Q^2}{A} + c^2(A - \mathbf{S}) + g I_1(x, \mathbf{S})$, la cinquième composante du flux de l'équation **PFS** sous forme non conservative (2.7). On suppose que l'écoulement est soit complètement en charge soit à surface libre. Le cas d'un état stationnaire avec point de transition étant traité en Section 2.2.6.3.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire à vitesse nulle, les quantités aux interfaces sont calculées

(voir Section 2.2.2 pour plus de détails à ce sujet) à partir de :

$$\begin{aligned}
AM_{i+1/2}^n &= A_i^n + \frac{g \tilde{A}_{i+1/2}^n}{2 \tilde{c}_{i+1/2}^2} \psi_i^{i+1} + \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{2} \\
QMP_{i+1/2}^n &= -\frac{g \tilde{A}_{i+1/2}^n}{2 \tilde{c}_{i+1/2}^2} \psi_i^{i+1} - \tilde{c}_{i+1/2} \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{2} \quad . \\
AP_{i+1/2}^n &= AM_{i+1/2}^n - \frac{g \tilde{A}_{i+1/2}^n}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} \psi_i^{i+1}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

où $\Delta A_{i+1/2} = A_{i+1} - A_i$ et ψ_i^{i+1} contient tous les termes sources décentrés

$$Z_{i+1} - Z_i + \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{S}}_{i+1/2}^n)(\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) + \Psi(\tilde{\mathbf{W}}_i + 1/2^n)(S_{i+1} - S_i).$$

On note $\tilde{c}_{i+1/2}$ la quantité $c(\tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}^n)$ avec

$$\tilde{\mathbf{W}}_{i+1/2}^n = \left(\tilde{Z}_{i+1/2}, \widetilde{\cos \theta}_{i+1/2}, \tilde{S}_{i+1/2}, \tilde{A}_{i+1/2}^n, \tilde{Q}_{i+1/2}^n \right)$$

où chacune de ses composantes sont définies par :

$$\tilde{Z} = \frac{Z_i + Z_{i+1}}{2}, \widetilde{\cos \theta} = \frac{\cos \theta_i + \cos \theta_{i+1}}{2}, \tilde{S} = \frac{S_i + S_{i+1}}{2}, \tilde{Q}_{i+1/2}^n = \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2}. \tag{2.41}$$

et l'approximation du terme $\tilde{A}_{i+1/2}^n$ sera précisée plus loin.

À l'instant t_n , le couple (A_i^n, Q_i^n) satisfait l'état d'équilibre de l'eau au repos si :

(H) $\forall i, Q_i^n = 0$ et A_i^n vérifie l'équation (c.f. l'équation (1.95)) :

$$c^2 \ln \left(\frac{A_{i+1}^n}{S_{i+1}} \right) + g \mathcal{H}(\mathbf{S}_{i+1}^n) \cos \theta_{i+1} + g Z_{i+1} = c^2 \ln \left(\frac{A_i^n}{S_i} \right) + g \mathcal{H}(\mathbf{S}_i^n) \cos \theta_i + g Z_i. \tag{2.42}$$

On dit que :

Définition 2.2.1.

1. Le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) pour une approximation donnée de $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ est (k_A, k_Q) -bien équilibré si et seulement si :

$$\forall i, |A_i^{n+1} - A_i^n| = O((\max_{i \in \mathbb{Z}} h_i)^{k_A}) \text{ et } |Q_i^{n+1} - Q_i^n| = O((\max_{i \in \mathbb{Z}} h_i)^{k_Q}).$$

On appelle les coefficients $k_A > 1$, resp. $k_Q > 1$, l'ordre du schéma bien équilibré (2.38), resp. (2.39).

2. Le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) pour une approximation donnée de $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ est bien équilibré si et seulement si :

$$\forall i, |A_i^{n+1} - A_i^n| = 0 \text{ et } |Q_i^{n+1} - Q_i^n| = 0.$$

(SF) Dans le reste de la section, on suppose $h_i = \Delta x$ constant, le rayon R et Z sont des fonctions affines, l'angle θ est constant. Compte tenu de ces hypothèses, à l'interface $x_{i+1/2}$, on a : $\Delta R_{i+1/2} = R_{i+1} - R_i = \Delta R$, $\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i = \Delta Z$ sont constants et en particulier $\Delta \cos \theta_{i+1/2}$ est nul.

Sous ces hypothèses, on montre alors que :

Théorème 2.2.1.

1. • Le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) avec

$$\tilde{A}_{i+1/2}^n = \frac{A_i^n + A_{i+1}^n}{2} \quad (2.43)$$

et de section S non constante ne préserve pas les états stationnaires au repos. En particulier, on a $k_Q = 1$ (au sens de la Définition 2.2.1).

- Pour S constant et $\frac{dZ}{dx} = 0$, le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) avec (2.43) est bien équilibré.
2. Il existe un choix de $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ pour lequel le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) est bien équilibré.

Remarque 2.2.8. Le cas S constant et $\frac{dZ}{dx} = 0$ du théorème ci-dessus est trivial car il découle de la consistance du flux numérique.

Dans les deux sections suivantes 2.2.6.1 et 2.2.6.2, on montre les deux points du théorème 2.2.1.

2.2.6.1 L'approximation avec la matrice standard

On suppose dans cette section que $\tilde{A}_{i+1/2}$ est donnée par l'approximation (2.43).

Calcul de l'ordre du schéma (2.38).

En notant la différence de flux de la quatrième composante du flux $QMP_{i+1/2} - QMP_{i-1/2}$ par $\Delta Q_{i+1/2}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i+1/2}^n &= \frac{g}{2\tilde{c}_{i-1/2}\tilde{c}_{i+1/2}} \left\{ (\psi_{i-1}^i - \psi_i^{i+1}) \tilde{c}_{i+1/2} \tilde{A}_{i-1/2}^n - (\tilde{A}_{i+1/2}^n - \tilde{A}_{i-1/2}^n) \tilde{c}_{i+1/2} \psi_i^{i+1} \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{c}_{i+1/2} - \tilde{c}_{i-1/2}) \tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1} \right\} + \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{2} (\tilde{c}_{i-1/2} - \tilde{c}_{i+1/2}) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{A}_{i+1/2}^n - \tilde{A}_{i-1/2}^n = \Delta A_{i+1/2}^n,$$

$$\psi_{i-1}^i - \psi_i^{i+1} = \begin{cases} -\Delta Z & \text{si } E_i = 0, \\ -\Delta Z - \frac{g \cos \theta}{2} \Delta R - \frac{c^2 \Delta S_{i+1/2}}{S_{i-1/2} S_{i+1/2}} \\ \quad \times \left(\Delta S_{i+1/2} \tilde{A}_{i-1/2}^n - \Delta A_{i+1/2}^n S_{i-1/2} \right) & \text{si } E_i = 1 \end{cases}$$

et

$$|\tilde{c}_{i+1/2} - \tilde{c}_{i-1/2}| \begin{cases} \leq C\Delta x & \text{si } E_i = 0, \\ = 0 & \text{si } E_i = 1 \end{cases}$$

pour une certaine constante $C \geq 0$.

En notant

$$M = \max \left(\max_i \left(\tilde{c}_{i+1/2} \tilde{A}_{i-1/2}^n \right), \max_i \left(\tilde{c}_{i+1/2} |\psi_i^{i+1}| \right), \max_i \left(\tilde{A}_{i+1/2}^n |\psi_i^{i+1}| \right), C \right)$$

et remarquant que

$$\forall i, O(\Delta R) = O(\Delta S_{i+1/2}) = O(\Delta A_{i+1/2}^n) = O(\Delta x)$$

et

$$O(\tilde{c}_{i+1/2} \tilde{c}_{i-1/2}) = O(S_{i+1/2} S_{i-1/2}) = O(1),$$

on en déduit :

$$|\Delta Q_{i+1/2}^n| \leq M \Delta x^2.$$

De manière équivalente, l'ordre du schéma (2.38) (au sens de la Définition 2.2.1) est $k_A = 2$:

$$|A_i^{n+1} - A_i^n| = O(\Delta x^2).$$

Calcul de l'ordre du schéma (2.39).

On note $F_5(AM_{i+1/2}^n, QMP_{i+1/2}^n) - F_5(AP_{i-1/2}^n, QMP_{i-1/2}^n)$ par $\Delta F = T_1 + T_2$ où

$$T_1 = \frac{\left(AM_{i+1/2}^n - AP_{i-1/2}^n \right) \left(QMP_{i+1/2}^n \right)^2 + AM_{i+1/2}^n \left(\left(QMP_{i+1/2}^n \right)^2 - \left(QMP_{i-1/2}^n \right)^2 \right)}{AM_{i+1/2}^n AP_{i-1/2}^n}$$

et

$$T_2 = \begin{cases} g \cos \theta \left(I_1(x_{i+1/2}, AM_{i+1/2}^n) - I_1(x_{i+1/2}, AP_{i-1/2}^n) \right) & \text{si } E_i = 0, \\ c^2 (AM_{i+1/2}^n - AP_{i-1/2}^n) + c^2 \Delta S_{i+1/2} & \text{si } E_i = 1. \end{cases}$$

Un simple calcul montre que :

$$\left| \left(Q_{i+1/2}^n \right)^2 - \left(Q_{i-1/2}^n \right)^2 \right| = O(\Delta x^3).$$

D'autre part, on a :

$$AM_{i+1/2}^n - AP_{i-1/2}^n = \Delta A_{i+1/2}^n + \frac{g}{2} \left(\frac{\tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1}}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} + \frac{\tilde{A}_{i-1/2}^n \psi_{i-1}^i}{\tilde{c}_{i-1/2}^2} \right). \quad (2.44)$$

Comme le terme $\left(\frac{\tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1}}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} + \frac{\tilde{A}_{i-1/2}^n \psi_{i-1}^i}{\tilde{c}_{i-1/2}^2} \right)$ est de l'ordre de Δx puisque

$$\psi_i^{i+1} = O(\Delta x),$$

on a :

$$|AM_{i+1/2}^n - AP_{i-1/2}^n| = O(\Delta x).$$

L'ordre du schéma (2.39) (au sens de la Définition 2.2.1) est donc $k_Q = 1$:

$$|Q_i^{n+1} - Q_i^n| = O(\Delta x).$$

Remarque 2.2.9. Dans le cas d'une conduite à section constante ($S = cte$) et de pente nulle ($\frac{dZ}{dx} = 0$) (i.e en considérant les équations **PFS** homogènes), le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) avec l'approximation (2.43) est bien équilibré.

En dépit de $k_Q = 1$, pour un écoulement en charge, le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) avec l'approximation (2.43) préserve numériquement les équilibres stationnaire à vitesse nulle grâce à la vitesse d'onde $c \approx 1400$ (c.f. voir l'équation (2.45)). En effet, considérons, par simplicité le cas $S = cte$. L'équation de l'état au repos au niveau continue est donnée par

$$c^2 \ln(A) + gR \cos \theta + gZ = cte.$$

Sous l'hypothèse **(H)** et en particulier l'équation (2.42), on écrit :

$$A_{i+1}^n = A_i^n \exp\left(-\frac{g}{c^2} \Delta Z\right).$$

Étant donné un pas d'espace Δx , pour de grande valeur de c , on peut approcher A_{i+1}^n par :

$$A_{i+1}^n \approx A_i^n \left(1 - \frac{g}{c^2} \Delta Z\right).$$

Ensuite, en remplaçant dans l'équation (2.44) A_{i+1}^n par l'approximation ci-dessus, on obtient

$$\left|AM_{i+1/2}^n - AP_{i-1/2}^n\right| = g A_i^n \frac{|\Delta Z|}{c^2} = O\left(\frac{\Delta x}{c^2}\right). \quad (2.45)$$

Comme nous l'avons constaté précédemment, bien que k_Q est toujours égale à 1, la constante $\frac{1}{c^2}$ stabilise le schéma (2.38-2.39)-(2.41) avec (2.43) vers le bon équilibre à vitesse nulle. On illustre numériquement ces faits aux figures 2.14 et 2.15. On considère une conduite uniforme de longueur 100 m, de diamètre 1 m avec une forte pente $\frac{dZ}{dx} = -0.9$ m/m et un pas d'espace $\Delta x = 1$. L'erreur absolue obtenue est 10^{-5} pour $c = 30$ et 10^{-9} pour $c = 200$.

En revanche, cette constatation n'est plus vraie pour un écoulement à surface libre en raison d'une faible vitesse du son par rapport à celle en charge. À titre d'exemple, on représente à la figure 2.16 le résultat d'une expérience numérique pour une conduite uniforme de diamètre 1 m, de longueur 10 m et de pente $\frac{dZ}{dx} = 10^{-2}$ avec un pas d'espace $\Delta x = 10^{-3}$.

2.2.6.2 Une matrice à profil stationnaire

Dans cette section, on approche le terme $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ (2.43) de manière à préserver l'état stationnaire à vitesse nulle. À cet égard, on suppose **(SF)**. Au niveau discret un état d'équilibre à vitesse nulle est parfaitement préservé si (c.f. FIG. 2.12) il existe n tel que pour tout i , si $Q_i^n = 0$ et,

$$\mathbf{A1} : c^2 \ln\left(\frac{A_{i+1}^n}{S_{i+1}}\right) + g\mathcal{H}(\mathbf{S}_{i+1}^n) \cos \theta + gZ_{i+1} = c^2 \ln\left(\frac{A_i^n}{S_i}\right) + g\mathcal{H}(\mathbf{S}_i^n) \cos \theta + gZ_i,$$

$$\mathbf{A2} : AM_{i+1/2}^n = AP_{i-1/2}^n,$$

$$\mathbf{A3} : QMP_{i+1/2}^n = QMP_{i-1/2}^n,$$

alors, pour tout $l > n$ les conditions A1, A2 et A3 sont satisfaites.

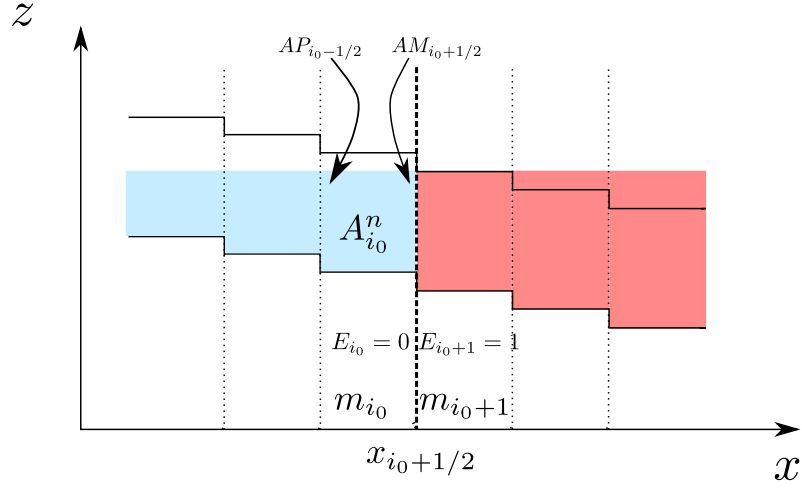


FIGURE 2.12 – Représentation discrète d'un état stationnaire mixte à vitesse nulle au temps $t = t^n$

Par suite, le schéma (2.38-2.39)-(2.41) avec une approximation bien choisie, préserve l'équilibre discret si :

A1 est satisfait pour un écoulement en charge, ce qui équivaut à

$$A_{i+1}^n = A_i^n \frac{S_{i+1}}{S_i} \exp \left(-\frac{g}{c^2} (\Delta Z + \Delta R \cos \theta) \right). \quad (2.46)$$

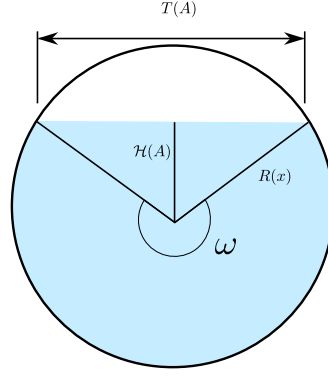
A1 est satisfait pour un écoulement à surface libre, ce qui équivaut à

$$h_{i+1}^n = \frac{h_i^n \cos \theta - \Delta Z}{\cos \theta}. \quad (2.47)$$

Remarque 2.2.10. En pratique, pour une conduite circulaire, A_{i+1}^n est calculé à partir de :

$$A_{i+1}^n = \frac{R_{i+1}^2}{2} (\omega_{i+1} - \sin(\omega_{i+1})) \quad (2.48)$$

où $\omega_{i+1} = 2 \left(\pi - \arccos \left(\frac{h_{i+1}}{R_{i+1}} \right) \right)$ est l'angle représenté sur la figure 2.13.

FIGURE 2.13 – angle ω

A2 est satisfait, ce qui équivaut à

$$AM_{i+1/2}^n - AP_{i-1/2}^n = \Delta A_{i+1/2}^n + \frac{g}{2} \left(\frac{\tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1}}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} + \frac{\tilde{A}_{i-1/2}^n \psi_{i-1}^i}{\tilde{c}_{i-1/2}^2} \right) = 0. \quad (2.49)$$

A3 est satisfait, ce qui équivaut à

$$\Delta Q_{i+1/2}^n = \frac{g}{2} \left\{ \frac{\tilde{A}_{i-1/2}^n \psi_{i-1}^i}{\tilde{c}_{i-1/2}^2} - \frac{\tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1}}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} \right\} + \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{2} (\tilde{c}_{i-1/2} - \tilde{c}_{i+1/2}) = 0. \quad (2.50)$$

Par conséquent, un état stationnaire à vitesse nulle est préservé si et seulement si $(\tilde{A}_{i-1/2}^n, \tilde{A}_{i+1/2}^n)$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} 0 = \Delta A_{i+1/2}^n + \frac{g}{2} \left(\frac{\tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1}}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} + \frac{\tilde{A}_{i-1/2}^n \psi_{i-1}^i}{\tilde{c}_{i-1/2}^2} \right), \\ 0 = \frac{g}{2} \left\{ \frac{\tilde{A}_{i-1/2}^n \psi_{i-1}^i}{\tilde{c}_{i-1/2}^2} - \frac{\tilde{A}_{i+1/2}^n \psi_i^{i+1}}{\tilde{c}_{i+1/2}^2} \right\} + \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{2} (\tilde{c}_{i-1/2} - \tilde{c}_{i+1/2}). \end{cases} \quad (2.51)$$

où $\Delta A_{i+1/2}^n = A_{i+1}^n - A_i^n$ pour lequel A_{i+1}^n est remplacé par (2.46) si l'écoulement est en charge, sinon par (2.47). On a donc :

$$\Delta A_{i+1/2}^n = \begin{cases} A_i^n \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \exp \left(-\frac{g}{c^2} (\Delta Z + \Delta R \cos \theta) \right) - 1 \right) & \text{si } E_i = 1, \\ \mathcal{F} \left(\frac{h_i^n \cos \theta - \Delta Z}{\cos \theta} \right) & \text{si } E_i = 0. \end{cases}$$

avec $\mathcal{F} : h \mapsto \mathcal{F}(h) = A$. Par exemple, pour une conduite à section circulaire, la fonction $\mathcal{F}$ est donnée par (2.48).

Finalement, le schéma numérique (2.38-2.39)-(2.41) avec $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ solution du système (2.51) est bien équilibré au sens de la Définition 2.2.1. La matrice $\tilde{D}_{i+1/2} = D(\tilde{W}_{i+1/2})$ de convection du problème de Riemann (2.12) donnée par les coefficients (2.41) et $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ définis comme la solution du système (2.51) est appelée *matrice à profil stationnaire*.

Dans le cas d'un écoulement complètement en charge en conduite uniforme, le système précédent est simplement :

$$\begin{cases} \Delta A_{i+1/2}^n + \frac{g \Delta Z}{2c^2} (\tilde{A}_{i+1/2}^n + \tilde{A}_{i-1/2}^n) &= 0, \\ \tilde{A}_{i+1/2}^n &= \tilde{A}_{i-1/2}^n. \end{cases}$$

Par conséquent, la solution est explicitement donnée par :

$$\tilde{A}_{i+1/2}^n = -\frac{c^2}{g} \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{\Delta Z} = -\frac{c^2}{g} \frac{A_i^n \left(\exp\left(-\frac{g}{c^2} \Delta Z\right) - 1 \right)}{\Delta Z}. \quad (2.52)$$

Remarque 2.2.11. En utilisant la relation $A_i^n = A_{i+1}^n \exp\left(\frac{g}{c^2} \Delta Z\right)$, on écrit :

$$\tilde{A}_{i+1/2}^n = -\frac{c^2}{g} \frac{\Delta A_{i+1/2}^n}{\Delta Z} = -\frac{c^2}{g} \frac{A_{i+1}^n \left(1 - \exp\left(\frac{g}{c^2} \Delta Z\right) \right)}{\Delta Z}. \quad (2.53)$$

On peut donc exprimer $\tilde{A}_{i+1/2}^n$ comme la demi-somme de (2.52) et (2.53) :

$$\tilde{A}_{i+1/2}^n = -\frac{c^2}{g \Delta Z} \left\{ \frac{A_{i+1}^n \left(1 - \exp\left(\frac{g}{c^2} \Delta Z\right) \right) + A_i^n \left(\exp\left(-\frac{g}{c^2} \Delta Z\right) - 1 \right)}{2} \right\}.$$

De plus, pour Δx suffisamment « petit », on a :

$$\tilde{A}_{i+1/2}^n \approx \frac{A_i^n + A_{i+1}^n}{2}.$$

Le schéma (2.38-2.39)-(2.41) avec (2.43) est donc l'approximation du premier ordre du schéma bien équilibré présenté.

Une analyse similaire pour un écoulement à surface libre montre que le schéma (2.38-2.39)-(2.41) (2.43) est aussi une approximation du premier ordre du schéma bien équilibré présenté.

Quelques simulations numériques.

Sur les figures 2.14, 2.15, 2.16, on trace le résultat obtenu par le schéma numérique avec la matrice standard avec $\tilde{A}_{i\pm 1/2}^n$ défini par (2.43) et celui donné par la matrice à profil stationnaire, dans le cas d'un écoulement en charge et à surface libre. La configuration pour l'écoulement en charge est : une conduite uniforme de 100 m de longueur et de 1 m de diamètre inclinée de $\frac{dZ}{dx} = -0.9$ m/m, avec un pas d'espace $\Delta x = 1$. La configuration pour l'écoulement en surface libre est : une conduite uniforme de 10 m de longueur et de 1 m de diamètre inclinée de $\frac{dZ}{dx} = 10^{-2}$ m/m, avec un pas d'espace $\Delta x = 10^{-3}$. Dans les deux cas, l'état au temps $t = 0$ est un état stationnaire exact.

On compare également les deux approches hors d'un état stationnaire pour un écoulement mixte dans une conduite uniforme de 100 m de longueur et de 2 m de diamètre, de pente $\frac{dZ}{dx} = 10^{-2}$ m/m. L'état au temps $t = 0$ étant un état stationnaire exact à vitesse nulle, on impose un débit nul à l'aval et on pilote la hauteur piezométrique à l'amont. La figure 2.17 montre bien que les deux méthodes, hors d'un état d'équilibre, sont en parfait accord.

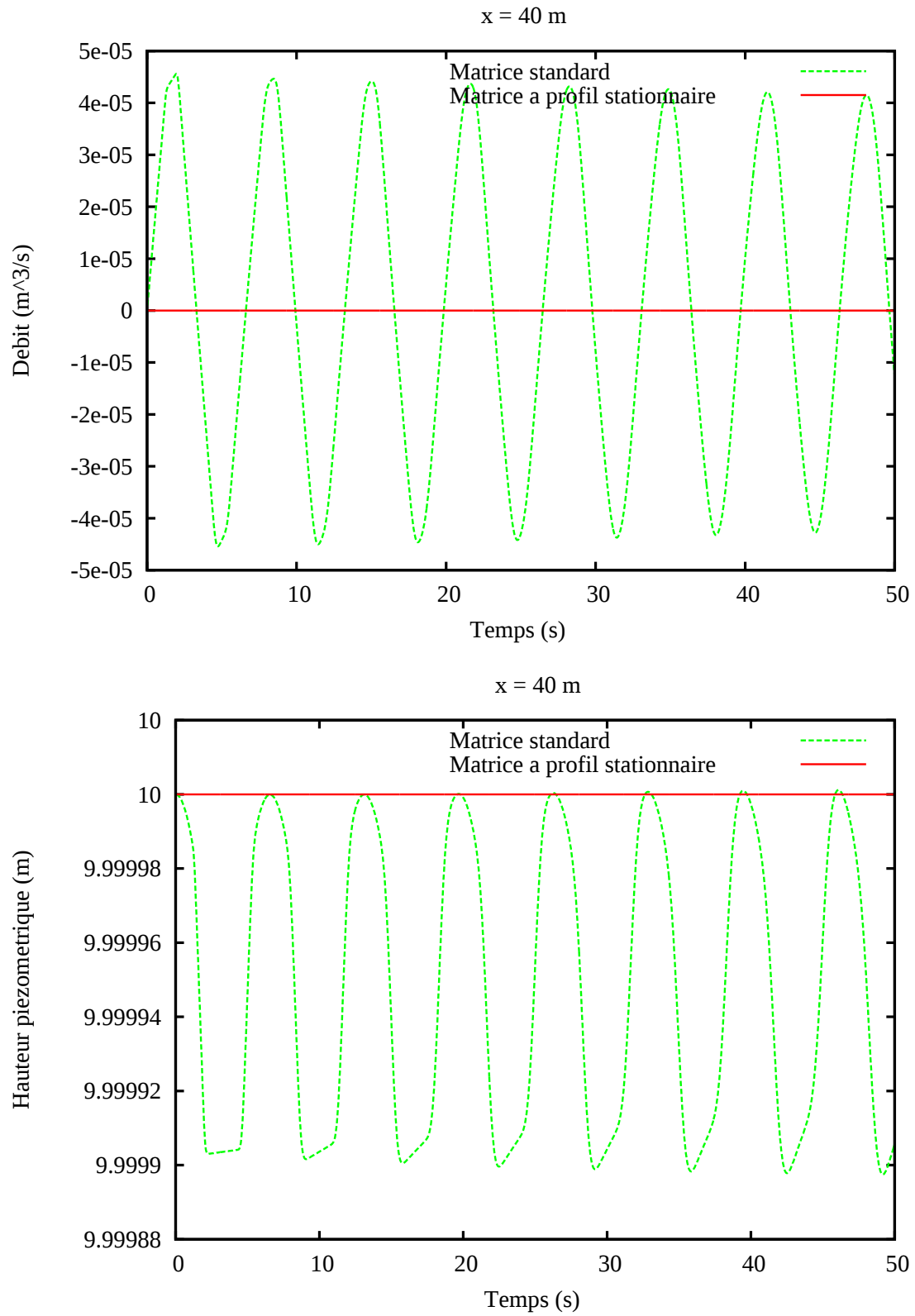


FIGURE 2.14 – Comparaison pour un écoulement stationnaire à vitesse nulle en charge avec $c = 30$

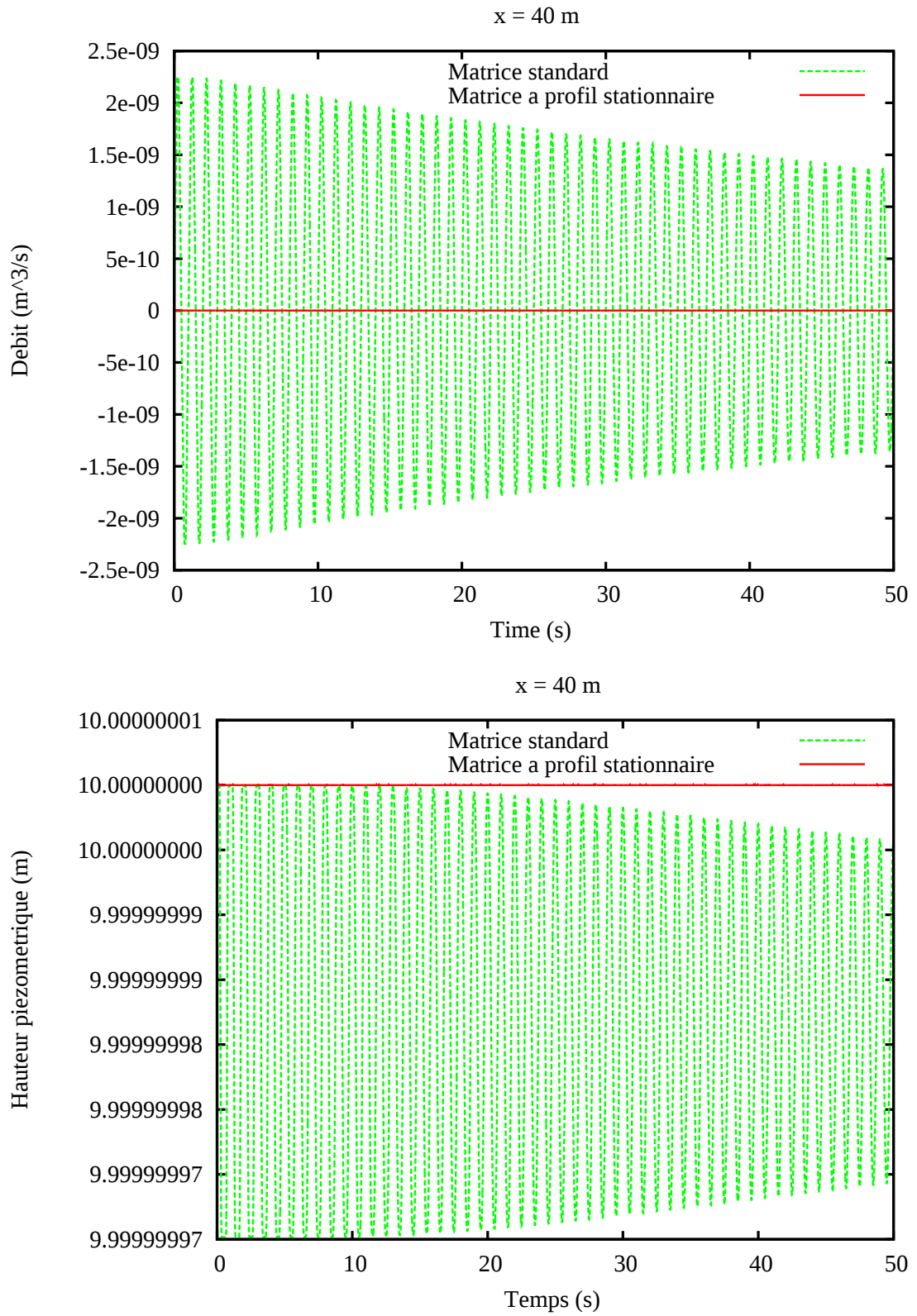


FIGURE 2.15 – Comparaison pour un écoulement stationnaire à vitesse nulle en charge avec $c = 200$.

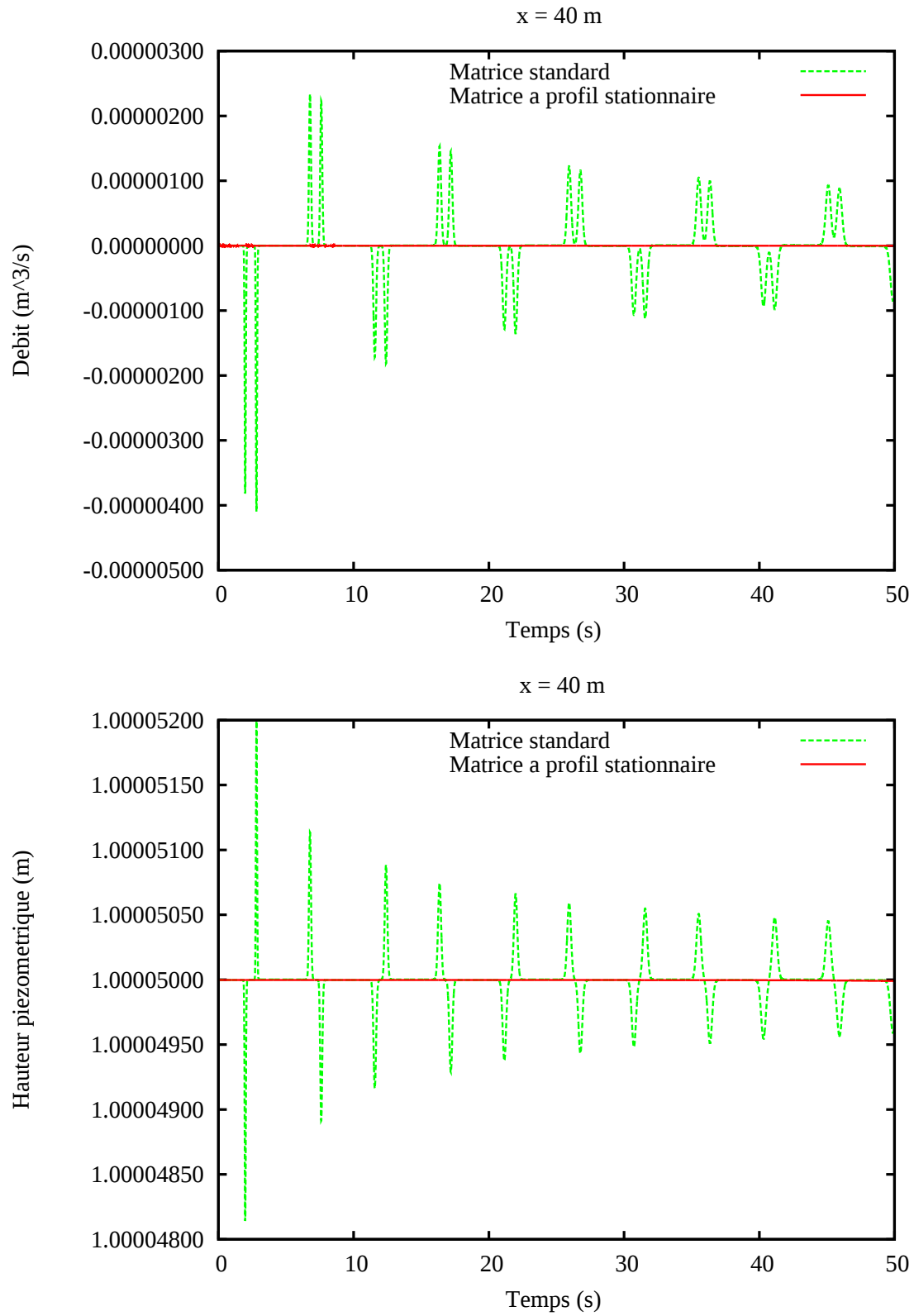


FIGURE 2.16 – Comparaison pour un écoulement stationnaire à vitesse nulle à surface libre

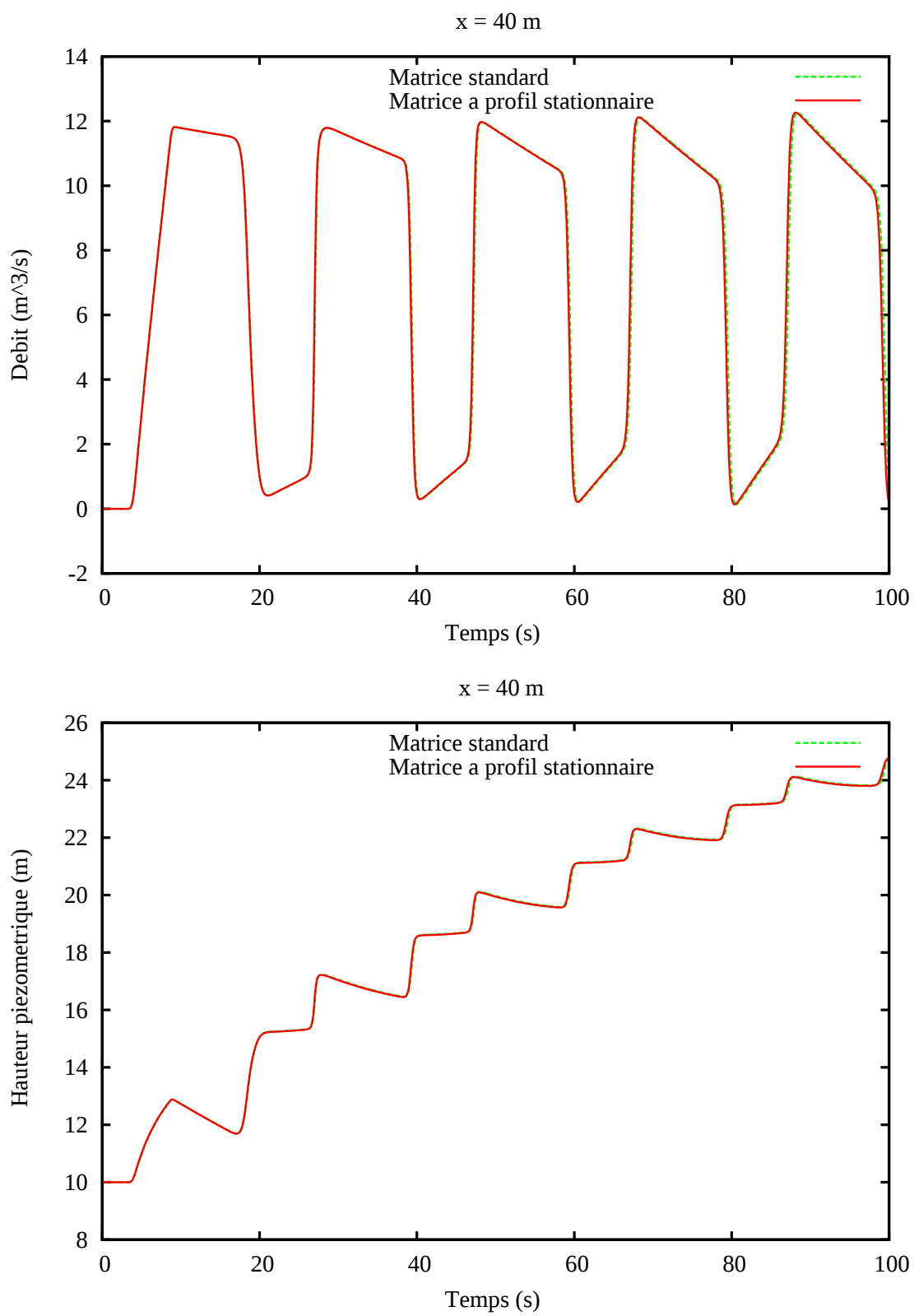


FIGURE 2.17 – Un test de comparaison des deux méthodes hors d'un état stationnaire

2.2.6.3 Traitement d'un état stationnaire mixte à vitesse nulle

Pour traiter le cas d'un état stationnaire avec point de transition, commençons par décrire un état d'équilibre mixte. Une représentation discrète est donnée sur la figure 2.12. Supposons qu'il existe un entier i_0 tel que toutes les mailles m_i à gauche de l'interface $x_{i_0+1/2}$ sont à surface libre, et les autres en charge, i.e. :

$$\begin{cases} E_i = 0 & \text{si } i \leq i_0 \\ E_i = 1 & \text{si } i > i_0 \end{cases}.$$

Un équilibre mixte signifie que la vitesse de propagation du point de transition est nulle :

$$w_{i_0+1/2}^n = \frac{Q^+ - Q^-}{A^+ - A^-} = 0.$$

On a donc nécessairement (c.f. FIG. 2.18) $\mathbf{U}^{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^-$ et $\mathbf{U}^{\mathbf{P}} = \mathbf{U}^+$.

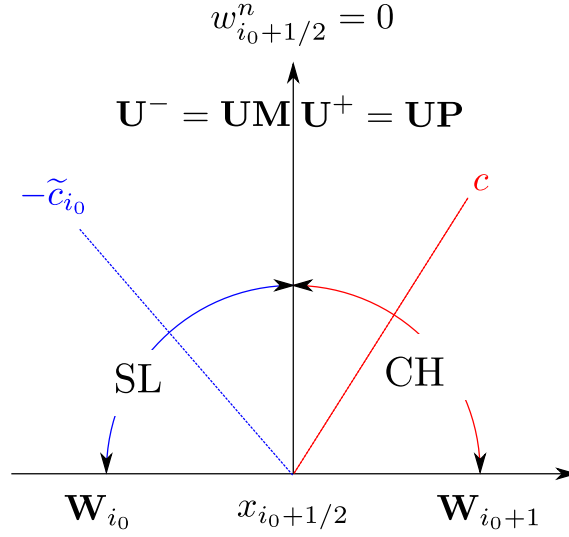


FIGURE 2.18 – État stationnaire mixte à vitesse nulle

Sur l'exemple de la figure 2.18, on applique le schéma avec la matrice à profil stationnaire pour les mailles à surface libre et celles en charge. Comme le schéma préserve l'équilibre discret à surface libre et en charge, alors, en appliquant ce qui précède, il maintient les états stationnaires mixtes à vitesse nulle.

2.2.7 Quelques simulations numériques en écoulement mixte et dépression

Le schéma numérique, basé sur la matrice standard, a été numériquement validé à l'issue de plusieurs cas tests proposés par EDF-CIH pour les écoulements en charge et à surface libre en conduite fermée à section uniforme avec terme de pente par Bourdarias *et al.* [18, 19]. En particulier, le cas test de Wiggert [105] (repris par plusieurs auteurs [6, 51, 104]) est reproduit avec succès pour la validation du modèle mixte.

En l'absence de données expérimentales pour une conduite à section variable, on s'est contenté d'illustrer un exemple de coup de bélier afin de mettre en évidence la capacité à capter les dépressions.

En notant D_0 le diamètre amont des conduites, fixé à 1 m, on considère (c.f. FIG. 2.19) une :

- conduite à section convergente de diamètre aval $D = 0.6 \text{ m}$,
- conduite à section uniforme de diamètre aval $D = 1 \text{ m}$,
- conduite à section divergente de diamètre aval $D = 1.4 \text{ m}$.

de 100 m de long et dont la pente de l'axe principal (axe de symétrie) est nulle à l'altitude $Z_0 = 1 \text{ m}$.

L'état initial est un stationnaire à vitesse nulle (i.e. $Q = 0$) et à surface libre (c.f. FIG. 2.19).

La hauteur d'eau à l'amont est pilotée de façon à provoquer un passage en charge suivi d'une onde de surpression se propageant de l'amont vers l'aval (c.f. hydrographe amont FIG. 2.20). Le débit à l'aval est maintenu constant durant toute la simulation (par exemple, vanne fermée), l'onde est réfléchiée et crée un coup de bélier (c.f. hydrographe aval FIG. 2.20). Durant ce processus, il pourrait se former sous les effets dynamique de l'écoulement une poche d'air qui s'évapore ou se condense créant ainsi une chute de la vitesse d'onde en charge. Puisque le modèle **PFS** ne prend pas en compte ce phénomène, la vitesse d'onde en charge c est supposée constante. Après la surpression vient une onde de dépression. Il s'agit dans ces simulations d'illustrer que le code numérique capte ces dépressions.

Les constantes du schéma sont :

Manning	: 0.012,
Nombre de mailles	: 100,
Delta x (m)	: 1,
Coefficient de CFL	: 0.8,
Durée de la simulation (s)	: 100.

On rappelle que le niveau 0 est donné en fonction de l'axe principal de la conduite et la hauteur piezométrique est définie par $Z + p$:

$$\begin{cases} p = 2R + c^2 \frac{A - S}{S} & \text{si l'écoulement est en charge,} \\ p = h & \text{si l'écoulement est à surface libre.} \end{cases}$$

On rappelle que, comme il a été souligné dans [17] ou dans [96], la vitesse du son en charge est sensible à la quantité d'air piégé dans l'eau : 1400 m/s pour l'eau pure, 600 m/s pour une concentration d'air de 0.1% en volume, 300 m/s pour une concentration de 0.45% . Dans la suite, on fixe la vitesse d'onde en charge à $c = 20 \text{ m/s}$.

À la figure 2.21, on trace le débit et la hauteur piezométrique au point $x = 50 \text{ m}$ en superposant les résultats pour les trois conduites. Le profil de chacune de ces courbes est déphasé et d'amplitude différente. On s'attend, en effet, à observer un saut de pression et débit, en amont de la conduite, plus grand dans les zones de fort rétrécissement (conduite à section convergente) que dans les deux autres. On observe aussi que (c.f. FIG. 2.21), compte tenu de la géométrie de la conduite à section convergente, l'amplitude de l'onde de surpression créée, l'onde de dépression est localisé en premier lieu par rapport aux autres conduites. En effet, approximativement, pour la conduite à section

- convergente, la dépression est localisée au temps $t \approx 19.117 \text{ s}$ (c.f. FIG. 2.22),
- uniforme, la dépression est localisée au temps $t \approx 24.075 \text{ s}$ (c.f. FIG. 2.23),
- convergente, la dépression est localisée au temps $t \approx 28.395.117 \text{ s}$ (c.f. FIG. 2.24).

Pour déterminer ces temps de première apparition de la dépression on a utilisé, l'indicateur $\frac{A}{S}$ (voir Remarque 2.2.5 et FIG. 2.8). En dépit du manque de données expérimentales, les résultats reproduisent, au moins qualitativement, un écoulement « réel ».

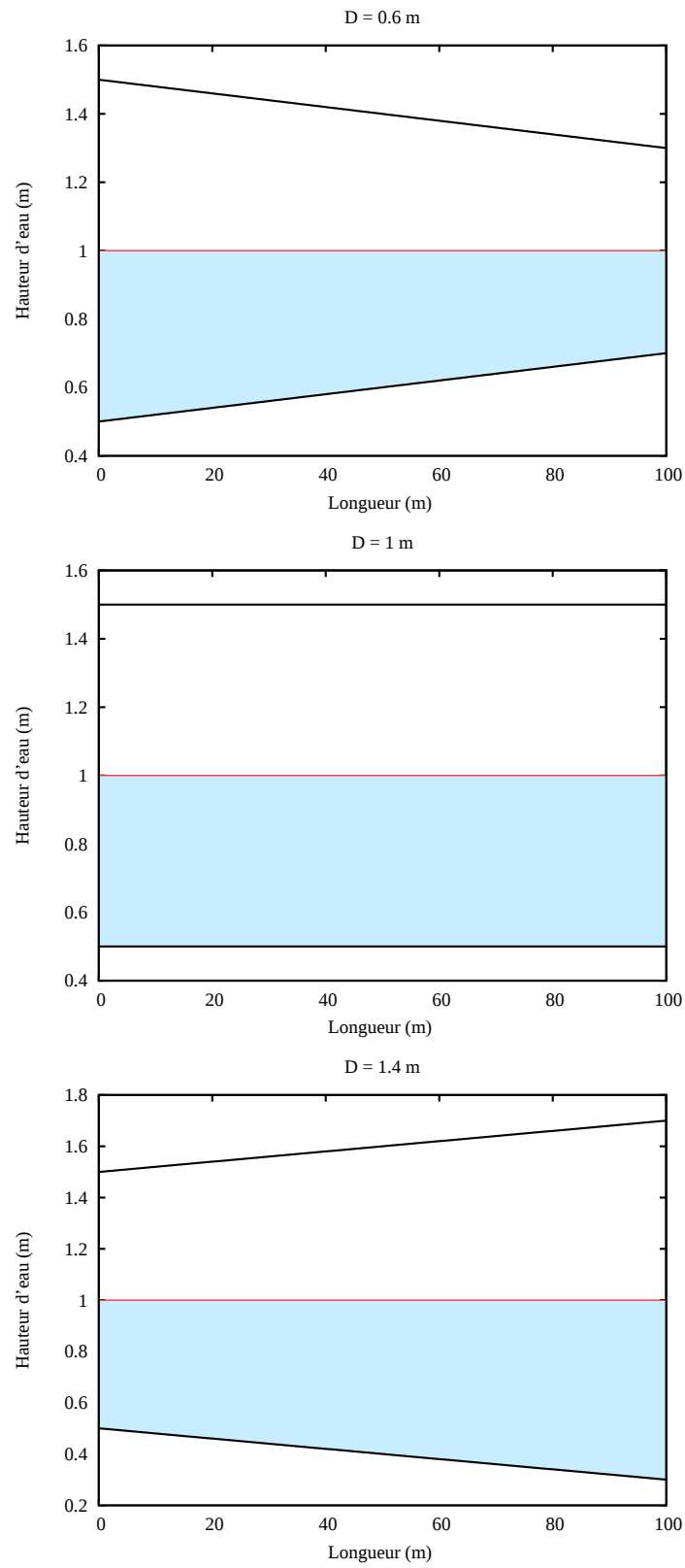


FIGURE 2.19 – État stationnaire au temps $t = 0$ s pour une conduite à section convergente, uniforme et divergente

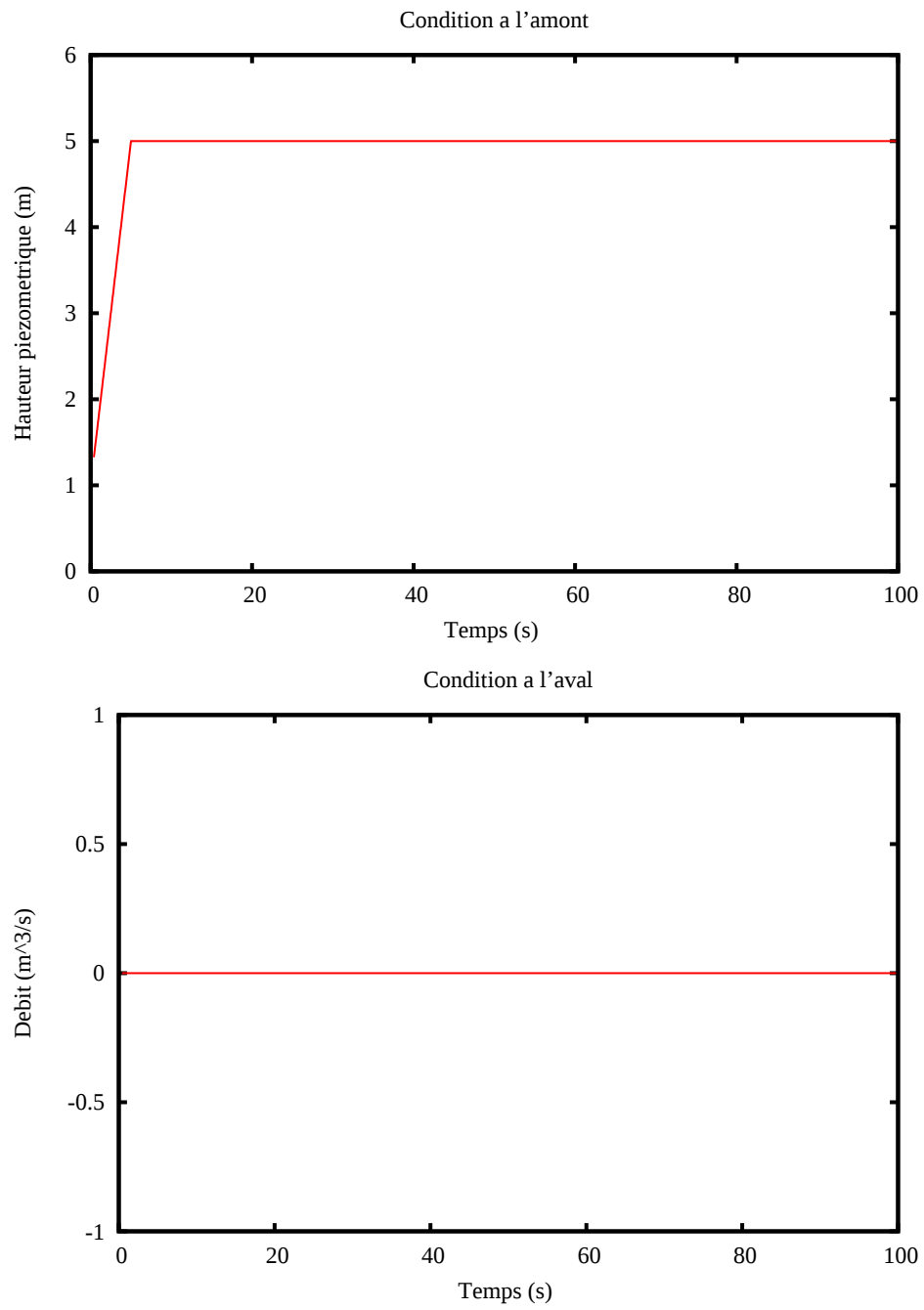
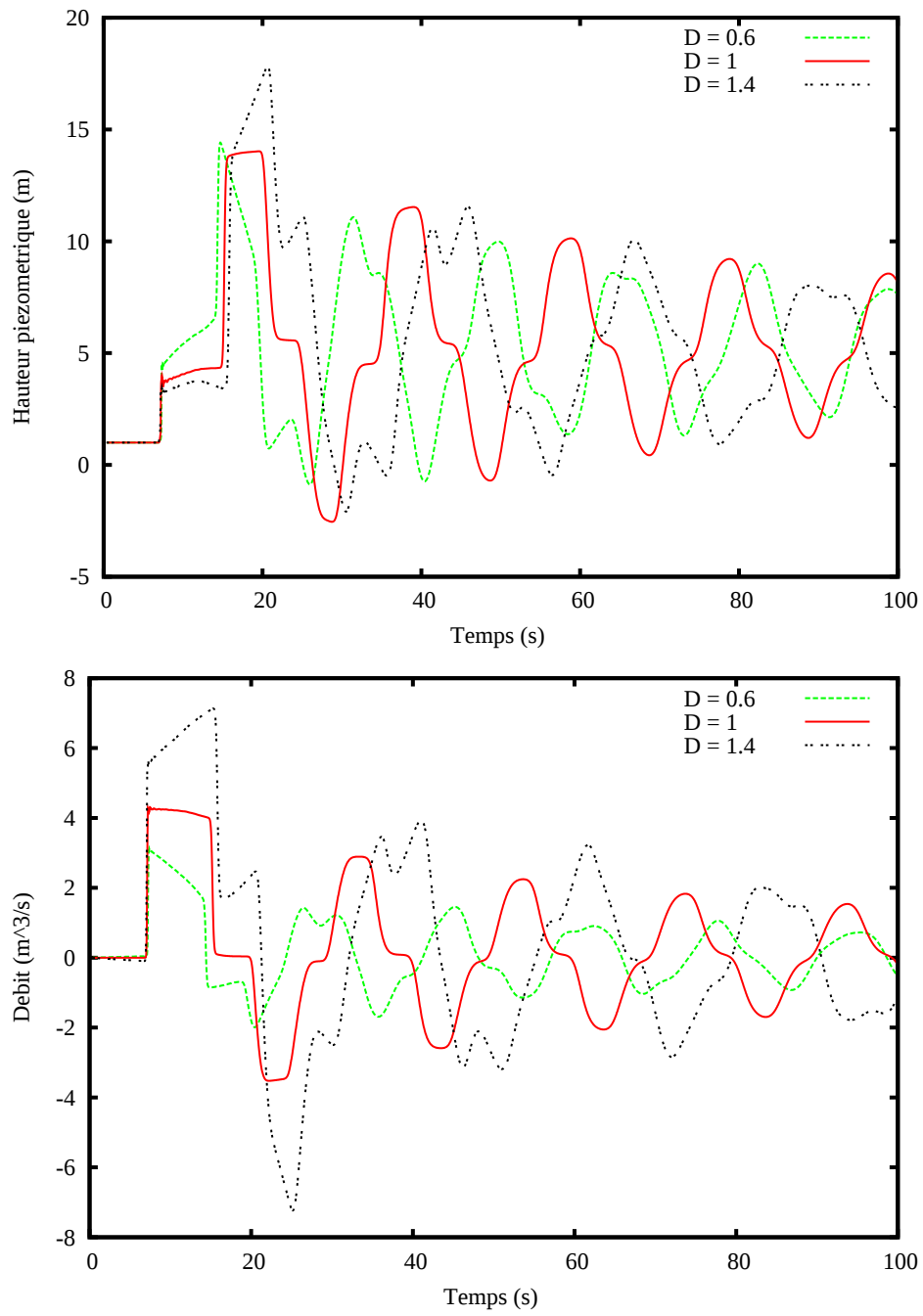


FIGURE 2.20 – Conditions aux limites

FIGURE 2.21 – Hauteur piezométrique et débit au point $x = 50\text{ m}$

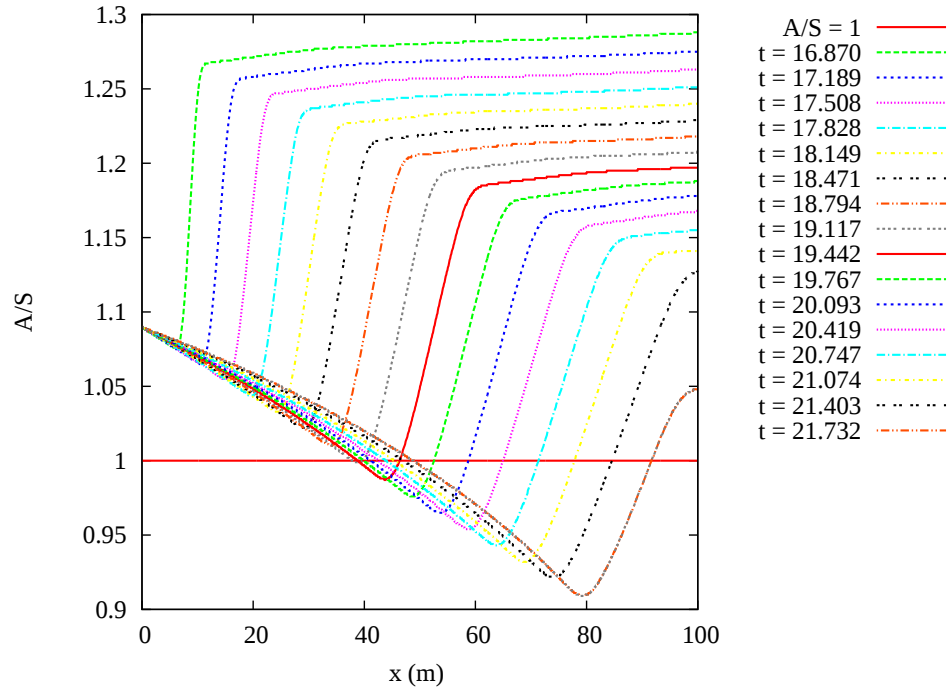


FIGURE 2.22 – Localisation en temps et en espace de la première zone de dépression : approximativement au temps $t = 19.117$ s pour la conduite à section convergente

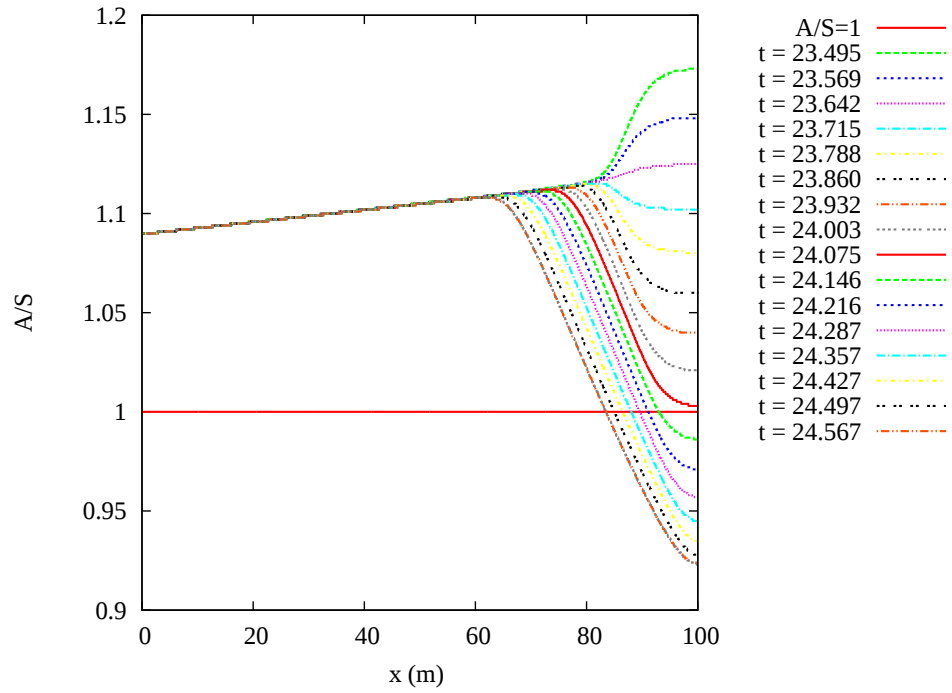


FIGURE 2.23 – Localisation en temps et en espace de la première zone de dépression : approximativement au temps $t = 24.075$ s pour la conduite à section uniforme

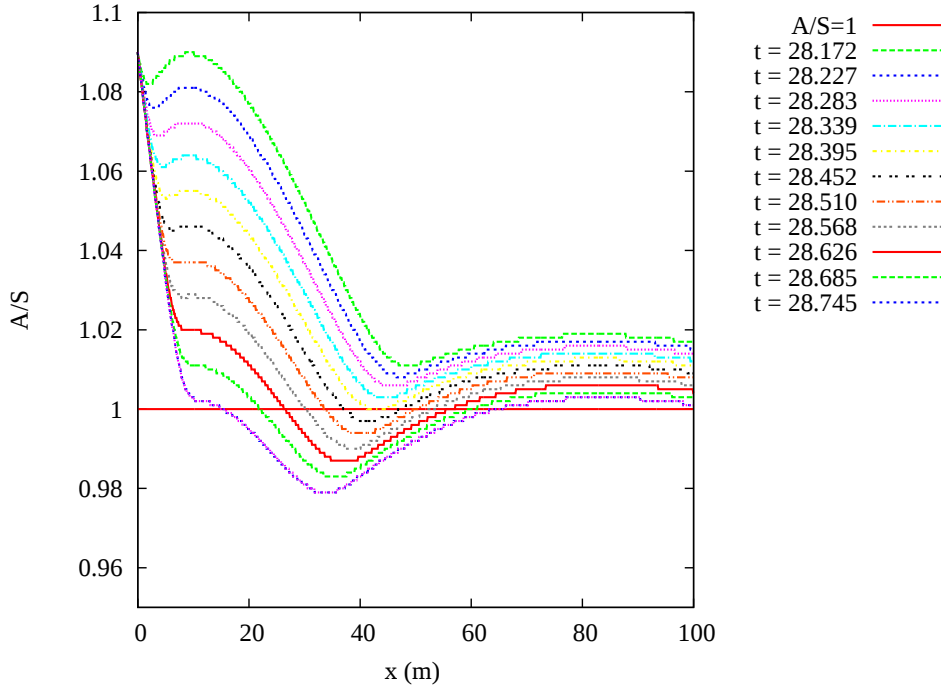


FIGURE 2.24 – Localisation en temps et en espace de la première zone de dépression : approximativement au temps $t = 28.395$ s pour la conduite à section divergente

2.2.8 Remarques générales concernant l'approximation numérique par le solveur VFRoe

On a proposé un schéma Volumes Finis basé sur un solveur VFRoe pour discrétiser les équations **PFS** en décentrant les termes sources aux interfaces y compris le terme de friction.

Pour traiter les points de transition, on a généralisé l'approche de « l'onde fantôme » à des termes sources complexes dépendant de termes de géométries et de l'inconnue.

On a également montré que ce schéma avec une approximation standard ne préserve pas les états d'équilibres. Cependant, pour un écoulement en charge, on montre que la vitesse d'onde joue le rôle d'un stabilisateur pour maintenir la solution stationnaire à vitesse nulle. En toute généralité, on a proposé une nouvelle matrice pour préserver les états équilibres au repos quelque soit le type d'écoulement, la géométrie et la pente. En particulier, si transition il y a, alors cette nouvelle approche permet également de préserver les stationnaires mixtes à vitesse nulle. On a appelé cette matrice *matrice à profil stationnaire* car elle est déduite de la représentation discrète d'un équilibre à vitesse nulle.

Le schéma présente, cependant, quelques limites. En effet, les ondes stationnaires issues du décentrement des termes sources aux interfaces, introduit un dénominateur qui ne permet pas de traiter les points critiques $u \approx c$. C'est un problème bien connu pour ce type de technique. Qui plus est, dans sa forme actuelle, le schéma ne permet pas de traiter les zones d'écoulements sur fond sec et assèchement.

Cependant, on pourrait introduire une fonction « cut-off » afin d'éviter les divisions par 0, mais cette approche entrainerait une non-conservativité de la masse (perte de masse d'eau). Une autre manière serait d'effectuer un changement de variables dans les équations **PFS** suivant [50]. Néanmoins, on préfère les solveurs cinétiques, qui à l'instar des solveurs VFRoe, traitent

naturellement les zones à problèmes : fond sec, assèchement, points critiques. Par ailleurs, aucun changement de variables n'est nécessaire dans les équations **PFS**. C'est l'objet de la Section 2.3 suivante.

2.3 Approximation du flux numérique par une méthode cinétique

Dans cette section, on rappelle le principe du solveur cinétique avec réflexion introduit par Perthame *et al.* [88] que l'on applique aux équations **PFS**. La motivation de l'utilisation et de l'adaptation d'un tel schéma réside dans sa simplicité d'écriture. C'est de plus une méthode élégante de par son interprétation cinétique qui introduit la notion de barrière de potentiel liée à la conservation de l'énergie mécanique d'une particule fictive. Qui plus est, les propriétés théoriques telles que la monotonie, la conservation de la masse, l'inégalité d'entropie (dans un cadre simple), et les états d'équilibres (dans un cadre simple) sont traduites très simplement numériquement. Il est clair que le cadre considéré dans [88] est relativement aisé puisque le seul terme source est un terme de topographie. La complexité des termes sources des équations de **PFS** est également une motivation en vue d'appliquer un tel schéma de manière à préserver les propriétés du modèle continu. Ce travail est une généralisation du schéma cinétique avec réflexion de [88]. On remplace le terme classique de topographie par un terme qu'on appelle *pseudo-topographie* qui regroupe tous les termes sources sans la friction. Ce dernier sera pris en compte *a posteriori* dans le modèle mais pas dans le schéma (elle sera incluse dans le terme de barrière de potentiel). Par ailleurs, on développe un suivi d'interface à l'échelle cinétique, suivant l'approche « ondes fantômes » développé en Section 2.2.3. Le schéma numérique est alors appelé « Full Kinetic Approach » et noté FKA.

2.3.1 Principe du solveur cinétique

Suivant l'idée de Perthame *et al.* [88], on introduit une fonction réelle χ définie sur $\mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = 1. \quad (2.54)$$

On définit ensuite une densité de particules $\mathcal{M}$, appelé *équilibre de Gibbs* :

$$\mathcal{M}(t, x, \xi) = \frac{A(t, x)}{b(t, x)} \chi\left(\frac{\xi - u(t, x)}{b(t, x)}\right) \quad (2.55)$$

où A est la variable mixte (introduite au Chapitre 1 par (1.89)), E est la variable d'état (égale à 1 si l'écoulement est en charge, 0 sinon) et b est donné par :

$$b(t, x) = \begin{cases} \sqrt{g \frac{I_1(x, A(t, x))}{A(t, x)} \cos \theta(x)} & \text{si } E(t, x) = 0, \\ \sqrt{g \frac{I_1(x, S(x))}{A(t, x)} \cos \theta(x) + c^2} & \text{si } E(t, x) = 1. \end{cases}$$

En vertu des éléments ci-dessus, on définit la formulation cinétique des équations **PFS** par :

Théorème 2.3.1 (Formulation cinétique des équations **PFS**). *(A, Q) est une solution forte du système **PFS** si et seulement si $\mathcal{M}$ satisfait l'équation de transport cinétique :*

$$\partial_t \mathcal{M} + \xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g\phi \partial_\xi \mathcal{M} = K(t, x, \xi) \quad (2.56)$$

où $K(t, x, \xi)$ est un terme de collision qui vérifie pour presque tout (t, x)

$$\int_{\mathbb{R}} K(t, x, \xi) d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi K(t, x, \xi) d\xi = 0.$$

Les termes sources sont regroupés dans un terme, ϕ , qu'on appelle pseudo-topographie :

$$\phi(x, A, \mathbf{W}) = \mathbf{B}(x, A, \mathbf{W}) \cdot \partial_x \mathbf{W} \quad (2.57)$$

où

$$\mathbf{W} = (Z, S, \cos \theta) \quad (2.58)$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \left(1, -\frac{c^2}{g} \left(\frac{A-S}{AS} \right) - \frac{\gamma(x, S) \cos \theta}{A}, \bar{z}(x, S) \right) & \text{si } E = 1, \\ \left(1, -\frac{\gamma(x, A) \cos \theta}{A}, \bar{z}(x, A) \right) & \text{si } E = 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

avec $I_2(x, \mathbf{S})$ écrit sous la forme $\gamma(x, \mathbf{S}) \frac{dS}{dx}$ pour une fonction γ (c.f. Remarque 2.2.1).

Preuve du Théorème 2.3.1 :

La preuve de ce théorème est basée sur les relations *macro-microscopique* :

$$A(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(t, x, \xi) d\xi, \quad (2.60)$$

$$Q(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{M}(t, x, \xi) d\xi, \quad (2.61)$$

$$\frac{Q(t, x)^2}{A(t, x)} + A(t, x) b(t, x)^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}(t, x, \xi) d\xi. \quad (2.62)$$

■

Remarque 2.3.1. Dans certaines configurations géométriques, on montre aussi que la propriété

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 K d\xi \leq 0$$

est satisfaite. D'un point de vue macroscopique, cela signifie qu'il existe une inégalité d'entropie. En effet, lorsque c'est le cas, il suffit de multiplier l'équation (2.56) par ξ^2 et d'intégrer en $\xi \in \mathbb{R}$.

Un des intérêts majeurs de l'utilisation de la formulation cinétique est le suivant :

le système non linéaire **PFS** est remplacé par une famille d'équation de transport linéaire (2.56) sur une quantité $\mathcal{M}$ dépendant, de manière non linéaire, des variables d'états du modèle **PFS**. On peut alors appliquer à chaque équation de transport, un schéma numérique Volumes Finis très simple. La variable (A, Q) des équations **PFS** est alors obtenu par calculs des moments (2.60) et (2.61).

La notion de « bonnes » propriétés correspond à la monotonie, l'inégalité d'entropie et le maintien des états d'équilibres. Les propriétés numériques du schéma que l'on va décrire sont étroitement liées au choix de la fonction χ . De plus, une distinction est nécessaire selon la complexité du domaine (section circulaire, rectangulaire, ...) et du type d'écoulement (surface libre et charge). On définit les ensembles

$$\mathfrak{V} = \left\{ \chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = 1 \right\}$$

et

$$\mathfrak{M} = \left\{ \mathcal{M} \geq 0; \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(\xi) d\xi = A, \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}(\xi) d\xi = Q \right\}.$$

2.3.1.1 Caractérisation de la fonction χ pour le modèle en charge

On considère dans cette section, le modèle complètement en charge (i.e. $E = 1$). Dans le cas d'une conduite axisymétrique, le terme relatif à la courbure, $\bar{z}$, est nul. Ces équations sont donc :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + c^2 A \right) &= -gA \frac{d}{dx} \left(Z - \frac{c^2}{g} \ln(S) \right) \end{cases} \quad (2.63)$$

Pour l'entropie mathématique (qu'on a déjà rencontrée dans la démonstration du Théorème 1.4.1)

$$\mathcal{E}_{ch} = \frac{Q^2}{2A} + c^2 A \ln(A/S) + gAZ, \quad (2.64)$$

on a l'inégalité suivante :

$$\partial_t \mathcal{E}_{ch} + \partial_x ((\mathcal{E}_{ch} + c^2 A)u) \leq 0.$$

Par rapport aux notations introduites dans le Théorème 2.3.1,

$$\phi = \frac{d}{dx} \left(Z - \frac{c^2}{g} \ln(S) \right) := \frac{d\tilde{Z}}{dx}.$$

On justifie alors l'appellation d'*équilibre de Gibbs* pour $\mathcal{M}$, pour un écoulement en charge, par la proposition suivante :

Théorème 2.3.2.

1. Le problème de minimisation $\min_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{J}_e(f)$ avec

$$\mathcal{J}_e(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{2} f(\xi) + c^2 f(\xi) \ln(f(\xi)) + c^2 f(\xi) \ln(c\sqrt{2\pi}) + g\tilde{Z} f(\xi) d\xi$$

est réalisé pour $\mathcal{M}$ tel que

$$\chi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-w^2}{2}\right). \quad (2.65)$$

2. Le minimum de l'énergie satisfait

$$\mathcal{J}_e(\mathcal{M}) = \mathcal{E}_{ch}(A, Q)$$

si A, Q sont solutions du système (2.63) et $\mathcal{E}_{ch}$ est défini par (2.64).

3. L'équilibre de Gibbs $\mathcal{M}$ est toujours solution de l'équation stationnaire :

$$\xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g\phi \partial_\xi \mathcal{M} = 0. \quad (2.66)$$

Remarque 2.3.2. Lorsque l'on prend en compte le terme de friction, on ne sait pas déterminer une telle fonction χ (si elle existe) à cause de la dépendance en x et en A . On verra que le problème est similaire pour un écoulement à surface libre dans un domaine à section variable.

Preuve du Théorème 2.3.2 :

On vérifie facilement que $f = \mathcal{M}$ est solution du problème de minimisation. Pour cela, il suffit de minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}_e^0(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{2} f(\xi) + c^2 f(\xi) \ln(f(\xi)) d\xi.$$

On introduit les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes intégrales λ et μ et la fonctionnelle :

$$j_e : (\xi, f) \mapsto \frac{\xi^2}{2}f + c^2 f \ln(f) - \lambda f - \xi \mu f.$$

On écrit ensuite les équations d'Euler-Lagrange associées à cette fonctionnelle :

$$\frac{\xi^2}{2} + c^2 \ln(f) + c^2 - \lambda - \xi \mu = 0.$$

On obtient alors f sous la forme

$$f(\xi) = \exp \left(-1 + \frac{2\lambda + 2\xi\mu - \xi^2}{2c^2} \right). \quad (2.67)$$

En utilisant les contraintes intégrales (2.60) et (2.61), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = A = c\sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2c^2 - 2\lambda - \mu^2}{c^2} \right) \right)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \xi f(\xi) d\xi = Au = \mu \left\{ c\sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2c^2 - 2\lambda - \mu^2}{c^2} \right) \right) \right\}.$$

On en tire

$$\mu = u \text{ et } \frac{\lambda}{c^2} = \ln \left(\frac{A}{c\sqrt{2\pi}} \right) + 1 - \frac{u^2}{2c^2}.$$

En injectant λ et μ dans (2.67), on obtient

$$f(\xi) = \frac{A}{c} \chi \left(\frac{\xi - u}{c} \right)$$

avec

$$\chi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{w^2}{2} \right).$$

La stricte convexité de la fonctionnelle $\mathcal{J}_e^0(f)$ assure l'unicité du minimum. On le note $\mathcal{M}$. Ceci achève la première partie du théorème.

Le point 2 du théorème est obtenu par un simple calcul en utilisant les relations (2.60) et (2.61).

Étant donné $\mathcal{M}$ qui minimise $\mathcal{J}_e$, on montre qu'il est aussi solution de l'équation stationnaire suivante :

$$\xi \partial_x \mathcal{M} - g \partial_x \tilde{Z} \partial_\xi \mathcal{M} = 0.$$

En exploitant les données $\partial_x \mathcal{M} = \frac{\partial_x A}{c} \chi \left(\frac{\xi}{c} \right)$, $\partial_\xi \mathcal{M} = \frac{A}{c^2} \chi' \left(\frac{\xi}{c} \right)$ et en notant $w = \xi/c$, on obtient :

$$w \partial_x A \chi(w) - g \partial_x \tilde{Z} \frac{A}{c} \chi'(w) = 0.$$

Cette équation stationnaire correspond à l'état d'équilibre macroscopique :

$$c^2 \ln(A) + g \tilde{Z} = cte.$$

Écrivant que $g \partial_x \tilde{Z} = -c^2 \partial_x (\ln A)$, on aboutit à l'équation différentielle ordinaire :

$$w \chi(w) + \chi'(w) = 0$$

dont la solution est exactement la fonction χ qui permet de définir l'équilibre de Gibbs obtenu au point 1. ■

2.3.1.2 Caractérisation de la fonction χ pour le modèle à surface libre

Dans cette section, on considère le modèle complètement à surface libre (i.e. $E = 0$). On rappelle ces équations :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + I_1(x, A) \cos \theta \right) &= -gA \frac{dZ}{dx} + gI_2(x, A) \cos \theta - gA\bar{z} \frac{d}{dx} \cos \theta \end{cases} \quad (2.68)$$

avec I_1 et I_2 définis, respectivement, par (1.48) et (1.49). Pour l'entropie mathématique (qu'on a déjà rencontrée dans la démonstration du Théorème 1.4.1) :

$$\mathcal{E}_{sl}(A, Q) = \frac{Q^2}{2A} + gA\bar{z}(x, A) \cos \theta + gAZ, \quad (2.69)$$

on a l'inégalité suivante :

$$\partial_t \mathcal{E}_{sl} + \partial_X ((\mathcal{E}_{sl} + gI_1(x, A) \cos \theta)u) \leq 0.$$

Par rapport aux notations introduites dans le Théorème 2.3.1,

$$\phi = \frac{dZ}{dx} - \frac{\gamma(x, A) \cos \theta}{A} \frac{dS}{dx} + \bar{z}(x, A) \frac{d}{dx} \cos \theta.$$

Dans un écoulement à surface libre, on sait justifier l'appellation d'*équilibre de Gibbs* que dans le cas d'une conduite rectangulaire à section uniforme et à pente constante, comme dans Perthame et al. [88] :

Théorème 2.3.3.

1. Le problème de minimisation $\min_{f \in \mathfrak{M}} \mathcal{J}_e(f)$ avec

$$\mathcal{J}_e(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{2} f(\xi) + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi b^2}{A} \right)^2 f^3(\xi) + g((h - 2I_1) \cos \theta + Z) d\xi$$

est réalisé pour $\mathcal{M}$ tel que

$$\chi(w) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{w^2}{4} \right)_+^{1/2} \quad (2.70)$$

où $\left(1 - \frac{w^2}{4} \right)_+$ est la partie positive de $1 - \frac{w^2}{4}$.

2. Le minimum de l'énergie satisfait

$$\mathcal{J}_e(\mathcal{M}) = \mathcal{E}_{sl}(A, Q)$$

si A, Q sont solutions du système (2.68) et $\mathcal{E}_{sl}$ est défini par (2.69).

3. L'équilibre de Gibbs $\mathcal{M}$ est toujours solution de l'équation stationnaire :

$$\xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g\phi \partial_\xi \mathcal{M} = 0. \quad (2.71)$$

Remarque 2.3.3. Avec le terme de friction, on ne sait pas déterminer (si elle existe), une fonction χ telles que les propriétés du théorème précédent soient encore vraies.

Preuve du Théorème 2.3.3 :

Dans le cas d'une conduite uniforme rectangulaire à pente constante, les termes I_2 et $\bar{z}$ disparaissent du fait que $\frac{dS}{dx} = 0$ et $\frac{d}{dx} \cos \theta = 0$. De plus, $I_1 = I_1(A)$ dépend seulement de la variable A .

On vérifie facilement que $f = \mathcal{M}$ est solution du problème de minimisation. Pour cela, il suffit de minimiser la fonctionnelle :

$$\mathcal{J}_e^0(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{2} f(\xi) + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi b^2}{A} \right)^2 f(\xi)^3 d\xi.$$

Comme dans la démonstration du Théorème 2.3.2, on introduit les équations d'Euler-Lagrange associées :

$$\frac{\xi^2}{2} + 2 \left(\frac{\pi b^2}{A} \right)^2 f(\xi)^2 = \lambda + \xi \mu$$

où λ et μ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes intégrales. On obtient alors f sous la forme

$$f(\xi) = \frac{A}{b^2 \pi \sqrt{2}} \left(\lambda + \xi \mu - \frac{\xi^2}{2} \right)_+^{1/2}. \quad (2.72)$$

En utilisant les contraintes intégrales, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = A = \frac{A(\mu^2 + 2\lambda)}{4b^2}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \xi f(\xi) d\xi = Au = \mu \left\{ \frac{A(\mu^2 + 2\lambda)}{4b^2} \right\}.$$

On en tire

$$\mu = u \text{ et } \lambda = 2b^2 - \frac{u^2}{2}.$$

En injectant λ et μ dans (2.72), on obtient

$$f(\xi) = \frac{A}{b} \chi \left(\frac{\xi - u}{b} \right)$$

avec

$$\chi(w) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{w^2}{4} \right)_+^{1/2}.$$

La stricte convexité de la fonctionnelle $\mathcal{J}_e^0(f)$ assure l'unicité du minimum. On le note $\mathcal{M}$. Ceci achève la première partie du théorème.

Le point 2 du théorème est obtenu par un simple calcul en utilisant les relations (2.60) et (2.61).

Étant donné l'équilibre de Gibbs, on montre qu'il est aussi solution de l'équation stationnaire suivante :

$$\xi \partial_x \mathcal{M} - \phi \partial_\xi \mathcal{M} = 0.$$

Un simple calcul permet d'obtenir :

$$\frac{3T I_1 - A^2}{2 I_1} w \chi(w) + \left\{ \frac{A^2}{I_1} - w^2 \frac{A^2 - I_1 T}{2 I_1} \right\} \chi'(w) = 0. \quad (2.73)$$

En exploitant les caractéristiques de la conduite rectangulaire de base T , on écrit $I_1 = \frac{A^2}{2T}$ et donc

$$\frac{3T I_1 - A^2}{2 I_1} = \frac{T}{2}, \quad \frac{A^2}{I_1} = 2T \text{ et } \frac{A^2 - I_1 T}{2 I_1} = \frac{T}{2}.$$

La solution de cette équation est donc :

$$\chi(w) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{w^2}{4} \right)_+^{1/2}.$$

■

Pour toutes les conduites non rectangulaires uniformes, on se sait pas montrer de telles propriétés pour une fonction χ particulière. En effet, si il en existait une alors χ serait solution de l'équation stationnaire :

$$\xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g\phi \partial_\xi \mathcal{M} = 0. \quad (2.74)$$

Or, une telle solution est nécessairement celle relative à une conduite rectangulaire uniforme avec pente constante.

En effet, soit $\chi \in \mathfrak{V}$ et $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ défini par χ . On suppose que $\mathcal{M}$ satisfait l'équation stationnaire :

$$\xi \partial_x \mathcal{M} - g\phi \partial_\xi \mathcal{M} = 0$$

où de manière équivalente, en posant $w = \xi/b$:

$$wc \partial_x \left(\frac{A}{b} \right) \chi(w) + \left(\frac{\partial_x (A b^2)}{b^2} - w^2 \frac{A}{b} \partial_x b \right) \chi'(w) = 0 \quad (2.75)$$

Puisque la fonction $\chi = \chi(\xi)$ cherchée doit dépendre seulement de ξ , on écrit :

$$\xi \partial_x \mathcal{M} = wb \partial_x \left(\frac{A}{b} \right) \chi(w) - w^2 \frac{A}{b} \partial_x b \chi'(w), \quad \partial_\xi \mathcal{M} = \frac{A}{b^2} \chi'(w), \quad \phi = -\frac{\partial_x (A b^2)}{A}$$

et l'équation stationnaire au niveau macroscopique permet d'exprimer

$$-\partial_x Z = \partial_x (h \cos \theta).$$

On a :

$$\partial_x b = \frac{g \cos \theta}{2b} \partial_x h \left(1 - T \frac{I_1}{A^2} \right) + \frac{g \cos \theta}{2Ab} \left(I_2 - \mathfrak{T} \frac{I_1}{A} \right) + g \frac{I_1}{2Ab} \frac{d}{dx} \cos \theta, \quad (2.76)$$

$$b \partial_x \left(\frac{A}{b} \right) = \partial_x h \frac{3T I_1 - A^2}{2 I_1} + \frac{A I_2 + I_1 \mathfrak{T}}{2 I_1} + \frac{A}{2} \frac{\frac{d}{dx} \cos \theta}{\cos \theta}, \quad (2.77)$$

$$-\phi \frac{A}{b^2} = \frac{A^2}{I_1} \partial_x h + A \left(\frac{I_2}{I_1} + \frac{\frac{d}{dx} \cos \theta}{\cos \theta} \right) \quad (2.78)$$

où

$$\mathfrak{T} = \int_{-R}^h \partial_x \sigma dz, \quad (2.79)$$

$$\partial_x A = T \partial_x h + \mathfrak{T}, \quad (2.80)$$

$$\partial_x I_1 = A \partial_x h + I_2. \quad (2.81)$$

En utilisant les égalités (2.76)–(2.81), l'équation stationnaire devient :

$$\partial_x h \left(\frac{3T I_1 - A^2}{2 I_1} w \chi(w) + \left(\frac{A^2}{I_1} - \frac{A^2 - I_1 T}{2 I_1} w^2 \right) \chi'(w) \right) \quad (2.82)$$

$$+ \left(\frac{A I_2 + I_1 \mathfrak{T}}{2 I_1} \right) w \chi(w) + \left(A \frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{A I_2 - \mathfrak{T} I_1}{I_1} \right) w^2 \right) \chi'(w) \quad (2.83)$$

$$+ A \left(\frac{\frac{d}{dx} \cos \theta}{\cos \theta} \frac{w}{2} \chi(w) + \left(\frac{\frac{d}{dx} \cos \theta}{\cos \theta} - \frac{\frac{d}{dx} \cos \theta}{\cos \theta} \frac{w^2}{2} \right) \chi'(w) \right) \quad (2.84)$$

$$= 0$$

où les équations (2.83) et (2.84) correspondent aux variations de section et de pente.

Il est maintenant très clair qu'une fonction $\chi \in \mathfrak{V}$ ne peut être solution de cette équation. Si on suppose que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos \theta &= 0, \\ \frac{dS}{dx} &= 0 \Rightarrow \mathcal{T} = I_2 = 0, \end{aligned}$$

alors elle est réduite à

$$\frac{3T I_1 - A^2}{2 I_1} w \chi(w) + \left\{ \frac{A^2}{I_1} - w^2 \frac{A^2 - I_1 T}{2 I_1} \right\} \chi'(w) = 0. \quad (2.85)$$

Donc, une fonction $\chi \in \mathfrak{V}$ est solution de cette équation si et seulement si les coefficients suivants sont constants : $\frac{3T I_1 - A^2}{2 I_1}$, $\frac{A^2}{I_1}$, et $\frac{A^2 - I_1 T}{2 I_1}$. Ce n'est le cas que lorsque la conduite est rectangulaire uniforme. ■

2.3.2 Solveur cinétique dans le cadre d'un écoulement sans point de transition

On rappelle les notations suivantes :

on considère un maillage spatial formé de N intervalles, $m_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ de longueur $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} := h_i$, $1 \leq i \leq N$, de centre $x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$ de sorte que si L est la longueur de l'axe principal, on a $x_{1/2} = 0$ et $x_{N+1/2} = L$.

Soit $(t_n)_{1 \leq n \leq n_{max}}$ une suite croissante tel que $t_0 = 0$ et $(\Delta t^n)_{1 \leq n \leq n_{max}} = (t_{n+1} - t_n)_{1 \leq n \leq n_{max}}$ le pas de temps.

Les inconnues discrètes sont les vecteurs $U_i^n = \begin{pmatrix} A_i^n \\ Q_i^n \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq n \leq n_{max}$ approximation de la valeur moyenne de la solution exacte $U(x, t_n)$ sur la maille m_i .

Les valeurs aux frontières amont et aval sont associés à deux mailles fictives numérotées respectivement 0 et $N+1$ et aux vecteurs colonnes U_0^n et U_{N+1}^n .

On considère une représentation continue par morceaux pour les termes sources (2.57) définie par (2.58) et (2.59), i.e.

$$\overline{\mathbf{W}}(t, x) = \mathbf{W}_i(t) \mathbb{1}_{m_i}(x)$$

avec $\mathbf{W}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{m_i} \mathbf{W} dx$ par exemple.

Dans un premier temps, en remplaçant $\mathbf{W}$ par $\overline{\mathbf{W}}$ et en négligeant le terme de collision K , l'équation de transport (2.56) pour la donnée initiale $f(t_n, x, \xi) = \mathcal{M}(t_n, x, \xi)$, s'écrit sur la maille m_i et pour $t_n \leq t < t_{n+1}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f + \xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} f = 0, \\ f(t_n, x, \xi) = \mathcal{M}(t_n, x, \xi) \end{cases} \quad (2.86)$$

car les termes sources sont constants par mailles. La discrétisation de cette équation est donnée par :

$$f_i^{n+1}(\xi) = \mathcal{M}_i^n(\xi) + \xi \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^-(\xi) - \mathcal{M}_{i-\frac{1}{2}}^+(\xi)) \quad (2.87)$$

où la contribution des termes sources est prise en compte aux interfaces et sont exprimés dans le flux numérique microscopique $\mathcal{M}_{i\pm 1/2}^\pm$ (défini en Section 2.3.2.1).

En prenant le premier et deuxième moment de cette équation, en notant :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} A_i^{n+1} \\ Q_i^{n+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$A_i^{n+1} := \int_{\mathbb{R}} f_i^{n+1} d\xi \quad \text{et} \quad Q_i^{n+1} := \int_{\mathbb{R}} \xi f_i^{n+1} d\xi,$$

on obtient un schéma Volumes Finis

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+) \quad (2.88)$$

où le flux numérique est donnée par :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^\pm := \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^\pm(\xi) d\xi, \quad (2.89)$$

le flux numérique microscopique étant défini à la Section 2.3.2.1.

Remarque 2.3.4. Notre objectif étant de calculer les quantités macroscopiques A et Q , on peut effectivement négliger le terme de collision K et considérer f au lieu de $\mathcal{M}$ dans les équations précédentes. En effet, les deux premiers moments de K étant nuls et comme on résout pour chaque pas de temps le problème (2.86) pour la donnée initiale l'équilibre de Gibbs, on calcule toutes les collisions en une seule fois sans avoir recours à l'expression de K .

Remarque 2.3.5. Le schéma Volumes Finis est soumis à une condition CFL comme dans la Section 2.2.4 et le suivi de l'état d'une maille est établi par l'algorithme présenté à la Section 2.2.4. En particulier, le suivi d'interface est traité à la Section 2.3.3.

2.3.2.1 Calcul du flux numérique microscopique

Pour calculer les quantités microscopiques aux interfaces, on suit les trajectoires des particules par une méthode des caractéristiques associée à l'équation de transport (2.56). Soit $s \in (t_n, t_{n+1})$ et i l'indice d'une maille interne. Les courbes caractéristiques $\Xi(s)$ et $X(s)$ associées à l'équation (2.56) :

$$\frac{d\Xi}{ds} = -g\phi(s, X(s)) := -g\mathbf{B}(s, A(s, X(s)), \mathbf{W}(X(s))) \cdot \partial_x \mathbf{W}(X(s)) \quad (2.90)$$

$$\frac{dX}{ds} = \Xi(s) \quad (2.91)$$

pour la donnée finale :

$$\begin{cases} \Xi(t_{n+1}) &= \xi \\ X(t_{n+1}) &= x_{i+1/2} \end{cases} \quad (2.92)$$

qui dépendra du signe de ξ .

Pour des données régulières, en multipliant l'équation (2.90) par Ξ et en utilisant (2.91), on obtient :

$$\Xi \frac{d\Xi}{dX} \frac{d\Xi}{ds} = -g\mathbf{B}(s, A(s, X(s)), \mathbf{W}(X(s))) \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{W}(X(s)),$$

ce qui permet de suivre la variation de l'énergie cinétique, $\frac{\Xi^2}{2}$, le long de la trajectoire :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\Xi(s)^2}{2} + g \int_{t_n}^s \mathbf{B}(t, A(t, X(t)), \mathbf{W}(X(t))) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{W}(X(t)) dt \right) = 0. \quad (2.93)$$

Remarque 2.3.6. En particulier, dans le cas d'une conduite uniforme de pente constante, $\mathbf{W}$ est réduit à Z et l'équation précédente correspond à la conservation de l'énergie mécanique des particules :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\Xi(s)^2}{2} + gZ(X(s)) \right) = 0.$$

En particulier, la quantité (2.93) étant conservée, on a :

$$\frac{\xi_i^2}{2} - \frac{\xi_{i+1}^2}{2} = g \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{B}(t, A(t, X(t)), \mathbf{W}(X(t))) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{W}(X(t)) dt$$

où $\xi_i = \Xi(t_n)$, $\xi_{i+1} = \Xi(t_{n+1})$.

En l'occurrence, en posant $\mathfrak{U}(t) = \begin{pmatrix} A(t, X(t)) \\ \mathbf{W}(X(t)) \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{G}(t, X(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}(t, \mathfrak{U}(t)) \end{pmatrix}$, on écrit l'égalité précédente comme suit :

$$\frac{\xi_i^2}{2} - \frac{\xi_{i+1}^2}{2} = g \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathfrak{G}(t, X(t)) \cdot \frac{d}{dt} \mathfrak{U}(t) dt.$$

En utilisant la définition d'un produit non-conservatif (c.f. Annexe A Théorème A.0.1) et en notant μ la mesure non-conservative, il vient :

$$\frac{\xi_i^2}{2} - \frac{\xi_{i+1}^2}{2} = g\mu([t_n, t_{n+1}^+]).$$

En supposant, par exemple, que $\xi_i > 0$, il existe $\bar{s}$ tel que $X(\bar{s}) = x_{i+1/2}$ (via l'équation (2.97)) et $\mathbf{W}$ soit nulle pour tout $t_n \leq s < \bar{s}$ et $\bar{s} < s \leq t_{n+1}^+$ (avec t_{n+1}^+ la limite à droite). En d'autre terme, suivant l'Annexe A, on en tire :

$$\frac{\xi_i^2}{2} - \frac{\xi_{i+1}^2}{2} = g\mu(\{x_{i+1/2}\}) \quad (2.94)$$

En notant, $\mu(\{x_{i+1/2}\}) = \Delta\phi_{i+1/2}^n \delta_{i+1/2}$ (noté simplement $\Delta\phi_{i+1/2}$ dans la suite) où $\delta_{i+1/2}$ est

la masse de Dirac localisée au point $x_{i+1/2}$, on a plus précisément :

$$\Delta\phi_{i+1/2} = \begin{cases} [Z]_{i+1/2} - [S]_{i+1/2} \int_0^1 \frac{c^2}{g} \left(\frac{\Psi_A(s) - \Psi_S(s)}{\Psi_A(s) \Psi_S(s)} \right) ds \\ - [S]_{i+1/2} \int_0^1 \frac{\gamma(s, \Psi_S(s)) \Psi_{\cos\theta}(s)}{\Psi_A(s)} ds \\ + [\cos\theta]_{i+1/2} \int_0^1 \bar{z}(s, \Psi_S(s)) ds & \text{si } E_i^n = 1, \\ [Z]_{i+1/2} - [A]_{i+1/2} \int_0^1 \frac{\gamma(s, \Psi_A(s))}{\Psi_A(s)} (\Psi_{\cos\theta}(s)) ds \\ + [\cos\theta]_{i+1/2} \int_0^1 \bar{z}(s, \Psi_A(s)) ds & \text{si } E_i^n = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

où $[O] = O_{i+1} - O_i$ est le saut de la quantité O en $x = x_{i+1/2}$ et $s \in [0, 1] \rightarrow \Psi_O(s) := \Psi(s; O_i, O_{i+1})$ est un chemin régulier (au sens de la définition de Annexe A Définition A.0.1) reliant O_i à O_{i+1} à travers l'interface $x = x_{i+1/2}$.

Remarque 2.3.7. En pratique,

- on choisit les « straight line path » : ce sont les chemins de la forme :

$$\Psi_O(s) := sO_{i+1} + (1-s)O_i.$$

- toutes les intégrales ci-dessus sont approchées par la méthode de quadrature du point milieu.
- dans le cas d'une conduite uniforme à pente constante, on retrouve le décentrement classique du terme source sous la forme :

$$\Delta\phi_{i+1/2} = [Z]_{i+1/2}.$$

D'autre part, le terme source ϕ étant nul sur la maille ouverte m_i , les droites caractéristiques des équations (2.90)-(2.91) sur $m_i \times (t_n, t_{n+1})$ pour la donnée finale,

$$\begin{cases} \Xi(t_{n+1}) &= \xi_i, \\ X(t_{n+1}) &= x_{i+1/2} \end{cases} \quad (2.96)$$

sont :

$$\Xi(s) = \xi_i \text{ et } X(s) = \xi_i(s - t_{n+1}) + x_{i+1/2}. \quad (2.97)$$

Les trajectoires dans le plan (X, Ξ) sont donc aussi discontinues (en général) et formées de segments parallèles à l'axe des x (c.f. FIG. 2.25).

Le terme $\Delta\phi_{i+1/2}$ est appelé *barrière de potentiel*. Selon la vitesse cinétique d'une particule ξ et grâce à l'équation (2.94), on distingue trois cas admissible (c.f. FIG. 2.25). Plus précisément, on prend en compte toutes les particules aboutissant au point $(x_{i+1/2}^-, t_{n+1})$ en vue de définir le flux microscopique en amont de l'interface $x_{i+1/2}$. Il y a donc trois cas de figure selon si la particule a été réfléchi par la barrière de potentiel, si la particule provient en amont, ou en aval de l'interface.

- Le premier cas à prendre en compte est celui de la transmission dite *positive*. Elle correspond au cas d'une particule qui se situe, au temps t_n , en amont de l'interface $x_{i+1/2}^-$ et se déplace avec une vitesse cinétique $\xi_i > 0$. La particule aboutit au point $(x_{i+1/2}^-, t_{n+1})$ avec la vitesse ξ_i . Le flux microscopique $\mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi_i)$ dépend alors de $\mathcal{M}_i^n(\xi_i)$.

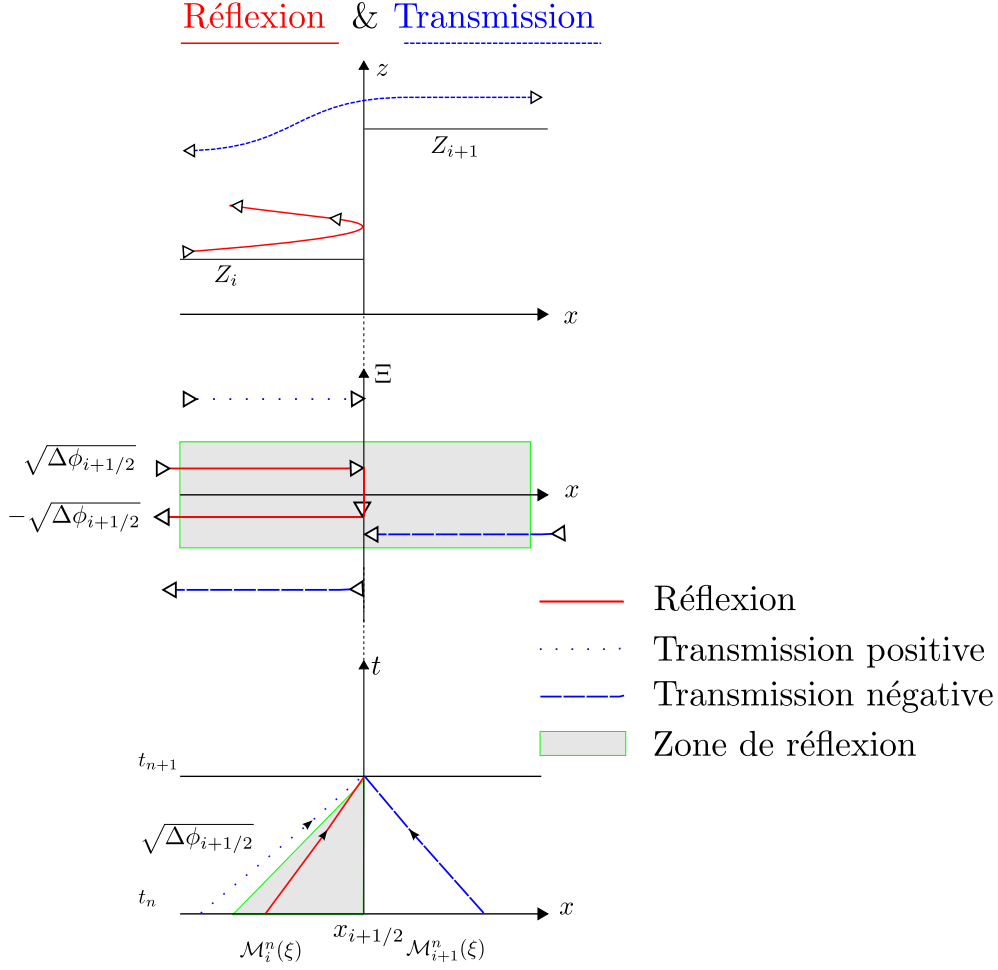


FIGURE 2.25 – Barrière de potentiel : transmission et réflexion de particules

En haut : configuration dans le plan (x, z) Au milieu : trajectoire de la solution caractéristique dans le plan (X, Ξ) En bas : trajectoire de la solution caractéristique dans le plan (X, t)

- Si une particule provient en amont de l'interface avec une vitesse $\xi_i > 0$ telle que $\xi_i^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} < 0$ alors elle est *réfléchie*. Cela signifie qu'elle ne possède pas assez d'énergie cinétique pour traverser la barrière $\Delta\phi_{i+1/2}$. La particule aboutit au point $(x_{i+1/2}^-, t_{n+1})$ avec la vitesse $-\xi_i < 0$ après avoir été réfléchi par la barrière. D'autre part, la condition $\xi_i^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} < 0$ signifie que la pente ξ_i de la droite X (2.97) ne peut pas excéder $\sqrt{2g\Delta\phi_{i+1/2}}$ (c.f. FIG. 2.25 (figure du bas)). Par suite, le flux $\mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi_i)$ est donc donné par $\mathcal{M}_i^n(-\xi_i)$.
- Le dernier cas correspond au cas de la transmission dite *négative*. C'est la situation d'une particule qui provient en aval de l'interface avec une vitesse $\xi_i < 0$ et qui traverse la barrière (sinon elle est réfléchi et prise en compte dans le flux $\mathcal{M}_{i+1/2}^+$). Sa vitesse au temps t_{n+1} est $\xi_{i+1} = -\sqrt{\xi_i^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2}}$ (obtenue à partir de la relation de saut (2.94)) avec $\xi_i^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} > 0$. Le signe « $-$ » traduit le fait que la particule effectue un déplacement de la droite vers la gauche, donc la vitesse est bien négative. La contrainte

sur la pente de la droite X est donnée par $\xi_i > -\sqrt{2g\Delta\phi_{i+1/2}}$. Le flux est donc défini par

$\mathcal{M}_{i+1}^n(\xi_{i+1}) = \mathcal{M}_{i+1}^n\left(-\sqrt{\xi_i^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2}}\right)$ pour les particules tel que $\xi_i^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} > 0$.

En procédant à la même analyse pour une particule aboutissant au point $(x_{i+1/2}^+, t_{n+1})$, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi) &= \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi > 0\}} \mathcal{M}_i^n(\xi)}_{\text{transmission positive}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi)}_{\text{réflexion}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} > 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n\left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2}}\right)}_{\text{transmission négative}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i+1/2}^+(\xi) &= \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi < 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n(\xi)}_{\text{transmission négative}} + \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi > 0, \xi^2 + 2g\Delta\phi_{i+1/2} < 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n(-\xi)}_{\text{réflexion}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi > 0, \xi^2 + 2g\Delta\phi_{i+1/2} > 0\}} \mathcal{M}_i^n\left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i+1/2}}\right)}_{\text{transmission positive}} \end{aligned}$$

Remarque 2.3.8. On peut également voir ces flux comme fonction de

$$(\xi, \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1}) \mapsto \mathcal{M}_{i+1/2}^\pm(\xi, \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1}).$$

Remarque 2.3.9. La prise en compte de la friction a lieu au niveau du terme de pente $\frac{dZ(x)}{dx}$. On le remplace, dans l'expression de $\Delta\phi_{i+1/2}$ dans les formules (2.98), par le terme de pente dynamique que l'on note encore $\frac{dZ(t, x)}{dx}$ (2.17). On effectue ainsi un splitting. La raison de cette approche est que, à ce jour, on ne sait pas comment l'intégrer dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique. Pour valider numériquement notre approche, on consacre un paragraphe entier à la Section 2.3.6, dans le cas test d'écoulement symétrique de la « double rupture de barrage ».

2.3.2.2 Propriétés du schéma cinétique

Le schéma cinétique est donc complètement défini par le schéma Volumes Finis (2.88) où le flux numérique macroscopique est calculé par (2.89), i.e. à partir du flux numérique microscopique (2.98). Dans cette section, on va présenter les propriétés numériques associées à ce schéma. Elles sont de deux types :

- celles qui sont propres au schéma (quelque soit χ) : on parle de *propriétés classiques*.
- celles qui sont propres au choix de χ : on parle de *propriétés spécifiques*.

Parmi les propriétés classiques, on a la conservation de A , condition de stabilité CFL (dès que χ est à support compact) et monotonie (si $A_i^0 > 0$ alors $A_i^n > 0$), traitement des points de critiques ($u \approx c$), des zones d'écoulements sur fond sec et d'assèchement, inégalité d'entropie discrète et états stationnaires. Les propriétés spécifiques au choix de la fonction χ sont : inégalité d'entropie discrète et les états stationnaires.

Propriétés classique du schéma.

Propriétés 2.3.1. Le schéma cinétique (2.88)-(2.89)-(2.98) satisfait les propriétés suivantes :

1. Conservation de A ,
2. Soit χ une fonction à support compact tel que $\text{Supp}\chi = [-M, M]$. Sous la condition CFL,

$$\Delta t^n \max_i (|u_i^n| + M b_i^n) \leq \max_i h_i,$$

le schéma cinétique conserve A positif, i.e.

$$A_i^0 \geq 0 \implies A_i^n \geq 0.$$

3. Traitement naturel des écoulements sur fond sec et de l'assèchement.

Preuve de la Propriétés 2.3.1 :

1. La propriété de conservation de A est traduite par la continuité de Q à travers les interfaces $x_{i+1/2}$. En notant la première composante du flux numérique (2.89) par $(F_A)_{i+1/2}^\pm$

$$(F_A)_{i+1/2}^\pm := \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{M}_{i+1/2}^\pm(\xi) d\xi$$

on a immédiatement :

$$(F_A)_{i+1/2}^+ = (F_A)_{i+1/2}^-$$

en effectuant le changement de variable $w^2 = \xi^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2}$ dans (2.98).

- 2.[Adaptation de la preuve de Perthame *et al.* [88]] Soit n un entier naturel. Supposons que pour tout i , $A_i^n > 0$. Notons $\xi_\pm = \max(0, \pm\xi)$ la partie positive ou négative d'un réel ξ et $\sigma = \frac{\Delta t^n}{\max_i h_i}$. Avec ces notations, on écrit, à partir de l'équation (2.87), l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} f_i^{n+1}(\xi) &\geq (1 - \sigma|\xi|)\mathcal{M}_i^n(\xi) \\ &+ \sigma\xi_+ \left(\mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i+1/2} < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2} > 0\}} \mathcal{M}_{i-1}^n \left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i+1/2}} \right) \right) \\ &+ \sigma\xi_- \left(\mathbb{1}_{\{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2} < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{i-1/2} > 0\}} \mathcal{M}_{i+1}^n \left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{i+1/2}} \right) \right) \end{aligned}$$

La fonction χ étant à support compact, on a

$$\text{si } |\xi - u_i^n| \geq M b_i^n \text{ alors } \mathcal{M}_i^n(\xi) = 0$$

et donc

$$f_i^{n+1}(\xi) \geq 0 \text{ si } |\xi - u_i^n| \geq M b_i^n, \forall i$$

vu comme une somme de terme non négatif.

Par suite, dès que $\mathcal{M}_i^n \neq 0$, i.e. si $|\xi - u_i^n| \leq M b_i^n$, ou encore $|\xi| < |u_j^n| + M b_i^n$, en utilisant la condition de CFL $\sigma|\xi| \leq 1$, on obtient que pour tout i , $f_i^{n+1} \geq 0$ puisque il est combinaison convexe de terme positif. Par la relation

$$A_i^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_i^{n+1}(\xi) d\xi,$$

on en déduit que : pour tout i , $A_i^{n+1} > 0$.

3. Dans la définition de $\mathcal{M}$, le seul élément pouvant provoquer une division par 0, lorsque A tend vers 0 est la fraction $\frac{A}{b(t, x)}$. Cependant, $b(t, x)$ étant de l'ordre de $\frac{I_1(A)}{A} \sim_0 A$ quand $A \rightarrow 0$, on en déduit que

$$\frac{A}{b(t, x)} \sim_0 A.$$

Ceci prouve que A peut s'annuler sans problème. ■

Propriétés spécifique du schéma cinétique associé au choix de χ .

On a vu aux Théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 que selon le type d'écoulement et la nature géométrique de la conduite, qu'on sait justifier ou non l'appellation *équilibre de Gibbs*. Lorsque c'est le cas, on a également vu que la fonction χ satisfait l'équation cinétique stationnaire (2.56). Dans ce contexte, on a :

Propriétés 2.3.2. *Le schéma cinétique (2.88)-(2.89)-(2.98) satisfait les propriétés suivantes :*

1. *il vérifie une inégalité d'entropie discrète,*

$$\mathcal{E}_i^{n+1} - \mathcal{E}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left(\eta_{i+1/2}^n - \eta_{i-1/2}^n \right) \leq 0$$

où

$$\eta_{i\pm 1/2}^n = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}_{i\pm 1/2}^n. \quad (2.99)$$

2. *il préserve tous les états stationnaires à vitesse nulle.*

Preuve de la Propriétés 2.3.2 :

1.[Adaptation de la preuve de Perthame *et al.* [88]] Le troisième moment de l'équation (2.87) donne :

$$\mathcal{J}_e(f_i^{n+1}) + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left(\eta_{i+1/2}^n - \eta_{i-1/2}^n \right) \leq 0$$

où $\mathcal{J}_e$ est la fonctionnelle définie au Théorème 2.3.2 ou 2.3.3, et $\eta_{i\pm 1/2}^n$ donné par (2.99). En utilisant le fait que l'équilibre de Gibbs $\mathcal{M}$ est le minimum de $\mathcal{J}_e$ (c.f. Théorème 2.3.2 et 2.3.3), on en déduit :

$$\mathcal{E}_i^{n+1} := \mathcal{J}_e(\mathcal{M}_i^{n+1}) \leq \mathcal{J}_e(f_i^{n+1}).$$

D'où le résultat escompté.

2.[Adaptation de la preuve de Perthame *et al.* [88]] Soit n un entier naturel. On suppose que pour tout i , $u_i^n = 0$ et que l'équation stationnaire macroscopique associée aux équations (2.63) ou (2.68) (selon le cas) est satisfaite. D'un point de vue microscopique, il est suffisant de montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi) = \mathcal{M}_{i-1/2}^+(\xi)$$

de sorte que $f_i^{n+1} = \mathcal{M}_i^n$, autrement dit $A_i^{n+1} = A_i^n$ et $u_i^{n+1} = u_i^n$.

D'après la définition des flux microscopiques (2.98), il suffit de traiter le cas $\xi \geq 0$ (puisque $\xi \leq 0$ présente la même difficulté). On doit donc montrer que :

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{M}_{i+1/2}^-(\xi) - \mathcal{M}_{i-1/2}^+(\xi) &= \mathcal{M}_i^n(\xi) \\ &\quad - \mathbb{1}_{\{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{i-1/2} < 0\}} \mathcal{M}_i^n(-\xi) \\ &\quad - \mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2} > 0\}} \mathcal{M}_{i-1}^n \left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2}} \right). \end{aligned}$$

- Dans le cas d'un écoulement en charge (2.63), et en prenant en compte $u_i^n = 0$, la fonction d'équilibre de Gibbs est donnée par :

$$\mathcal{M}_i^n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{A_i^n}{c} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2c^2}\right).$$

Le résultat lorsque $\xi \geq 0$ et $\xi^2 - 2g\Delta\phi_{i-1/2} < 0$ avec

$$\Delta\phi_{i-1/2} = Z_{i+1} - Z_i - \frac{c^2}{g} \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

est évident.

Lorsque $\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2} > 0$, tirant parti de l'équation stationnaire associée aux équations (2.63) :

$$c^2 \ln(A_i^n/S_i) + gZ_i = c^2 \ln(A_{i-1}^n/S_{i-1}) + gZ_{i-1}, \text{ i.e.}$$

$$A_i^n = A_{i-1}^n \frac{S_i}{S_{i-1}} \exp\left(-\frac{g}{c^2}(Z_{i+1} - Z_i)\right) = A_{i-1}^n \exp\left(-\frac{2g\Delta\phi_{i-1/2}}{2c^2}\right),$$

on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_i^n(\xi) - \mathcal{M}_{i-1}^n\left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}c} \left(A_i^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{2c^2}\right) - A_{i-1}^n \exp\left(-\frac{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2}}{2c^2}\right) \right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{2c^2}\right)}{\sqrt{2\pi}c} \left(A_i^n - A_{i-1}^n \exp\left(-\frac{2g\Delta\phi_{i-1/2}}{2c^2}\right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Dans le cas d'un écoulement à surface libre dans une conduite rectangulaire uniforme de pente constante, la fonction d'équilibre de Gibbs est donnée par :

$$\mathcal{M}_i^n(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{A_i^n}{b_i^n} \left(1 - \frac{\xi^2}{4(b_i^n)^2}\right)_+^{1/2}$$

avec

$$A = (-R + h)T = HT \text{ et } b^2 = \frac{gI_1(A) \cos \theta}{A} = g \frac{H}{2} \cos \theta$$

où R est le rayon, h la hauteur d'eau et T la largeur de la conduite. De même que précédemment, le résultat lorsque $\xi \geq 0$ et $\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2} < 0$ avec

$$\Delta\phi_{i-1/2} = Z_{i+1} - Z_i$$

est évident.

Lorsque $\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2} > 0$, on écrit :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_i^n(\xi) - \mathcal{M}_{i-1}^n\left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{A_i^n}{b_i^n} \left(1 - \frac{\xi^2}{4(b_i^n)^2}\right)_+^{1/2} - \frac{A_{i-1}^n}{b_{i-1}^n} \left(1 - \frac{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2}}{4(b_{i-1}^n)^2}\right)_+^{1/2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{g \cos \theta}} \left(\sqrt{H_i^n} \left(1 - \frac{\xi^2}{2gH_i^n \cos \theta}\right)_+^{1/2} - \sqrt{H_{i-1}^n} \left(1 - \frac{\xi^2 + 2g(Z_i - Z_{i-1})}{2gH_{i-1}^n \cos \theta}\right)_+^{1/2} \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation stationnaire associée aux équations (2.68) :

$$gH_i \cos \theta + Z_i = gH_i \cos \theta + Z_i, \text{ i.e.}$$

$$Z_i - Z_{i-1} = g \cos \theta (H_{i-1} - H_i),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_i^n(\xi) - \mathcal{M}_{i-1}^n \left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{i-1/2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{g \cos \theta}} \left(\sqrt{H_i^n} \left(1 - \frac{\xi^2}{2gH_i^n \cos \theta} \right)_+^{1/2} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{H_{i-1}^n} \left(1 - \frac{\xi^2 + 2g(H_{i-1} - H_i) \cos \theta}{2gH_{i-1}^n \cos \theta} \right)_+^{1/2} \right) = 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.10. On a vu que pour obtenir un équilibre de Gibbs, il fallait être dans des conditions particulières comme un écoulement

- en charge quelque soit la géométrie, ou
- à surface libre dans une conduite rectangulaire uniforme avec pente constante.

D'autre part, dans la démonstration du point 2 de la Propriété 2.3.1, la stabilité du schéma est obtenue grâce à la compacité du support de la fonction χ . En d'autre terme, l'équilibre de Gibbs, pour le modèle en charge, donnée par (2.65) ne peut être utilisé numériquement.

Qui plus est, dans le cas général des équations complètes **PFS**, si il existe un tel équilibre de Gibbs, on ne sait pas le calculer. C'est pourquoi dans la suite, on utilise une fonction χ de structure très simple :

$$\chi(w) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]} \quad (2.100)$$

pour lequel une condition de stabilité est donnée par le point 2 de la Propriété 2.3.1, et dont les intégrales sont simples à calculer. Les inconvénients de cette approche sont :

- on ne sait pas a priori si la propriété d'inégalité d'entropie discrète est satisfaite, et
- les états stationnaires ne sont en général jamais maintenus.

Pour palier la difficulté engendré par le deuxième item, on a mis au point un schéma numérique bien équilibré (préservant tous les états stationnaires) au niveau macroscopique (2.88) (c.f. Section 2.3.5). Il est basé sur l'approche matrice à profil stationnaire développée pour le solveur VFRoe (c.f. Section 2.2.6). Quant à l'inégalité d'entropie discrète, elle semble être satisfaite numériquement. À ce jour, on a aucun critère théorique pouvant confirmer cela mathématiquement (comme pour la justification de l'équilibre de Gibbs).

2.3.3 Traitement des points de transitions : approche FKA

La méthode des « ondes fantômes » exposée à la Section 2.2.3, bien que donnant des résultats satisfaisants, a l'inconvénient d'introduire une rupture méthodologique par rapport au calcul purement cinétique des flux aux interfaces qui ne sont pas des points de transition. On propose ici une approche basée sur les caractéristiques cinétiques généralisées appliquée à l'équation de transport (2.56), comme pour les relations (2.98).

On considère les deux cas génériques : état en charge se propageant vers l'aval (figure 2.26 ci-dessous) et état à surface libre se propageant vers l'aval. Il s'agit encore, dans les deux cas, de déterminer les maxwelliennes $\mathcal{M}^\pm$ correspondant aux états $U^\pm$ de part et d'autre de la trajectoire Γ du point de transition supposée linéaire sur un pas de temps avec une vitesse w à définir de

façon à satisfaire les relations de saut de Rankine-Hugoniot. La maxwellienne $\mathcal{M}^-$ est alors utilisée à la place de $\mathcal{M}_{i+1}$ dans l'évaluation des flux (suivant les formules (2.98), cas $w > 0$).

L'équation de transport (2.56) est écrite pour les seuls cas de transmission car on ne s'intéresse qu'aux trajectoires qui rencontrent Γ .

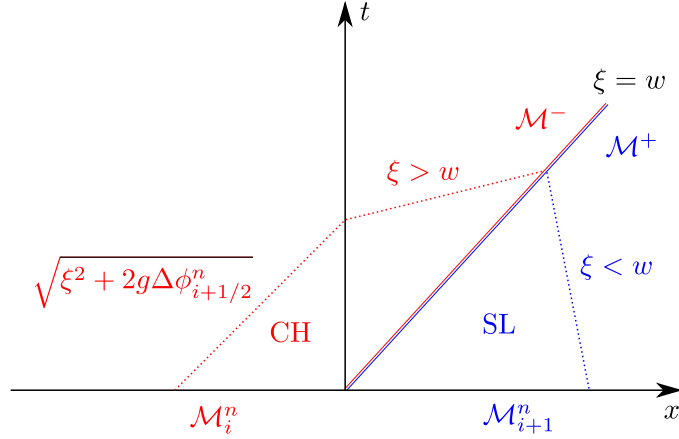


FIGURE 2.26 – État en charge se propageant vers l'aval

On obtient ainsi, au niveau microscopique :

$$\forall \xi > w, \quad \mathcal{M}^-(\xi) \mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g \Delta \phi_{i+1/2}^n > 0\}} = \mathcal{M}_i^n(\sqrt{\xi^2 + 2g \Delta \phi_{i+1/2}^n}) \mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g \Delta \phi_{i+1/2}^n > 0\}}, \quad (2.101)$$

et

$$\forall \xi < w, \quad \mathcal{M}^+(\xi) = \mathcal{M}_{i+1}^n(\xi). \quad (2.102)$$

D'où, au niveau macroscopique les relations :

$$\begin{aligned} & \int_w^{+\infty} \left(\frac{1}{\xi} \right) \mathcal{M}^-(\xi) \mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g \Delta \phi_{i+1/2}^n > 0\}} d\xi \\ &= \int_w^{+\infty} \left(\frac{1}{\xi} \right) \mathcal{M}_i^n(\sqrt{\xi^2 + 2g \Delta \phi_{i+1/2}^n}) \mathbb{1}_{\{\xi^2 + 2g \Delta \phi_{i+1/2}^n > 0\}} d\xi \end{aligned} \quad (2.103)$$

et

$$\int_{-\infty}^w \left(\frac{1}{\xi} \right) \mathcal{M}^+(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^w \left(\frac{1}{\xi} \right) \mathcal{M}_{i+1}^n(\xi) d\xi. \quad (2.104)$$

Il convient de remarquer que certaines des relations précédentes peuvent être triviales car les maxwelliennes sont en pratique choisies à support compact : le choix le plus simple, implémenté dans les tests numériques et dans le logiciel FLOWMIX¹, correspond à la fonction $\chi = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}$ qui donne à $\mathcal{M}(\xi)$ le support $[u \pm c(A)\sqrt{3}]$. Ce phénomène peut se produire dans le cas d'un écoulement à surface libre se propageant vers l'aval (ou dans le cas symétrique d'un écoulement en charge se propageant vers l'amont) pour les équations qui concernent la zone à surface libre uniquement car il s'agit (aux termes correctifs de pente près) de comparer, dans les équations

1. Logiciel développé pour EDF-CIH

(2.103) la vitesse de propagation de l'interface avec $u + c(A)\sqrt{3}$ (qui est très grand dans la zone en charge).

Les équations (2.103) s'écrivent, en omettant l'indice n pour alléger les notations :

$$\frac{A^-}{c(A^-)} (\delta^- - \gamma^-) = \frac{A_i}{c(A_i)} \left(\sqrt{\delta_i^2 - 2g \Delta\phi_{i+1/2}} - \sqrt{\gamma_i^2 - 2g \Delta\phi_{i+1/2}} \right) \quad (2.105)$$

$$\frac{A^-}{c(A^-)} ((\delta^-)^2 - (\gamma^-)^2) = \frac{A_i}{c(A_i)} (\delta_i^2 - \gamma_i^2) \quad (2.106)$$

où γ^- , δ^- , γ_i , δ_i sont définis par :

$$\gamma^- = \max(w', u^- - c(A^-)\sqrt{3}), \quad \delta^- = \max(w', u^- + c(A^-)\sqrt{3})$$

avec $w' = \max(w, \sqrt{2g \max(0, -\Delta\phi_{i+1/2})})$ et

$$\gamma_i = \max(w'', u_i - c(A_i)\sqrt{3}), \quad \delta_i = \max(w'', u_i + c(A_i)\sqrt{3})$$

avec $w'' = \max(\sqrt{\max(0, w^2 + 2g \Delta\phi_{i+1/2}^n)}, \sqrt{2g \max(0, \Delta\phi_{i+1/2})})$.

De même, les équations (2.104) s'écrivent :

$$\frac{A^+}{c(A^+)} (\beta^+ - \alpha^+) = \frac{A_{i+1}}{c(A_{i+1})} (\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}) \quad (2.107)$$

$$\frac{A^+}{c(A^+)} ((\beta^+)^2 - (\alpha^+)^2) = \frac{A_{i+1}}{c(A_{i+1})} (\beta_{i+1}^2 - \alpha_{i+1}^2) \quad (2.108)$$

où α^+ , β^+ , α_{i+1} , β_{i+1} sont définis par :

$$\alpha^+ = \min(w, u^+ - c(A^+)\sqrt{3}), \quad \beta^+ = \min(w, u^+ + c(A^+)\sqrt{3})$$

et

$$\alpha_{i+1} = \min(w, u_{i+1} - c(A_{i+1})\sqrt{3}), \quad \beta_{i+1} = \min(w, u_{i+1} + c(A_{i+1})\sqrt{3}).$$

Bien sûr, compte tenu de (2.107), (2.108) peut être remplacé par

$$\alpha^+ + \beta^+ = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (2.109)$$

Les inconnues du problème sont à nouveau w , A^- , Q^- , A^+ , Q^+ (rappelons que seuls A^- et Q^- sont utilisés par la suite). Compte tenu de la remarque faite plus haut, on a adopté la procédure suivante :

État en charge se propageant vers l'aval : on résout le système formé des équations (2.20), (2.21), relations de saut de Rankine-Hugoniot, ainsi que des équations (2.105), (2.106) et (2.107), privilégiant ainsi l'information provenant de la zone qui contient l'interface $x_{i+1/2}$ impliquée dans le calcul des flux.

État à surface libre se propageant vers l'aval : l'expérience acquise grâce au code FLOWMIX montre que le système précédent convient dans tous les cas testés. Ne pouvant exclure de disposer ainsi d'un système sous déterminé, on teste l'inégalité « critique » $w' > u_i + c(A_i)\sqrt{3}$ en remplaçant w par $w_{pred} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{A_{i+1} - A_i}$ qui sert de valeur initiale dans la procédure de type quasi-Newton utilisée pour la résolution du système. Si le résultat est positif, on utilise le système formé des équations (2.20), (2.21),

$$\Psi^+ - \Psi^- = w(u^+ - u^-)$$

où Ψ est la *charge totale* définie par

$$\Psi = \frac{u^2}{2} + c^2 \ln\left(\frac{A}{S}\right) + g \mathcal{H}(\mathbf{S}) \cos \theta + g Z,$$

(comme dans l'approche de « l'onde fantôme »), complété par (2.107) et (2.108).

2.3.4 Traitement des conditions aux limites

On présente le cas des conditions limites amont (le cas aval étant obtenu de manière symétrique). Il convient de distinguer deux cas : le cas d'un état amont identique à celui de la première maille (pas de point de transition ou bien un point de transition sortant) et le cas d'un changement d'état (point de transition entrant). Précisons que l'état amont est localisé juste à gauche de l'interface $\{x = 0\}$ et que le saut éventuel $\Delta\phi_{1/2}^n$ à travers cette interface est calculé sur la première demi maille. La figure 2.27 ci-dessous est relative au premier cas. La maxwellienne $\mathcal{M}_0$ est associée à l'état amont à déterminer, pour lequel, rappelons le, est déjà connu soit le débit équivalent SL Q_0 , soit l'aire équivalente SL soit une relation entre ces quantités (par exemple la charge).

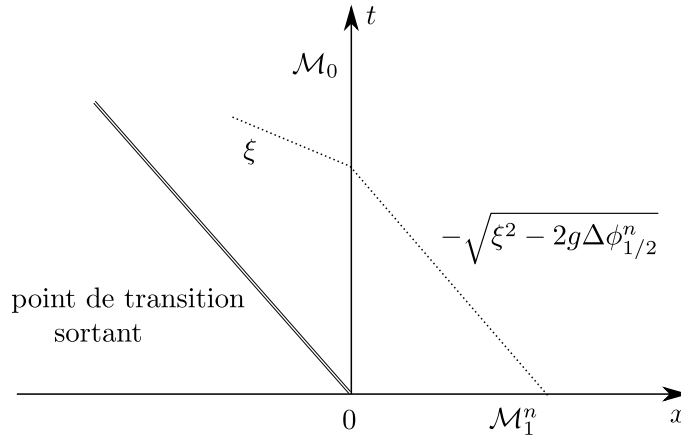


FIGURE 2.27 – Conditions aux limites : amont sans changement d'état

Premier cas : $E_{amont} = E_1$

On utilise l'information transmise par les caractéristiques cinétiques « sortantes ». On obtient alors, au niveau macroscopique :

$$\int_{-\infty}^{\xi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \mathcal{M}_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\xi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \mathcal{M}_1^n(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{1/2}^n}) d\xi, \quad (2.110)$$

avec $\xi_0 = -\sqrt{2g \max(0, \Delta\phi_{1/2}^n)}$. Ce qui s'écrit :

$$\frac{A_0}{c(A_0)} (\delta_0 - \gamma_0) = \frac{A_1}{c(A_1)} \left(\sqrt{\gamma_1^2 + 2g \Delta\phi_{1/2}} - \sqrt{\delta_1^2 + 2g \Delta\phi_{1/2}} \right) \quad (2.111)$$

$$\frac{A_0}{c(A_0)} (\delta_0^2 - \gamma_0^2) = \frac{A_1}{c(A_1)} (\delta_1^2 - \gamma_1^2) \quad (2.112)$$

où $\gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1$ sont définis par :

$$\gamma_0 = \min(\xi_0, u_0 - c(A_0)\sqrt{3}), \quad \delta_0 = \min(\xi_0, u_0 + c(A_0)\sqrt{3})$$

et

$$\gamma_1 = \min(\xi_1, u_1 - c(A_1)\sqrt{3}), \quad \delta_1 = \min(\xi_1, u_1 + c(A_1)\sqrt{3})$$

avec $\xi_1 = -\sqrt{2g \max(0, -\Delta\phi_{1/2}^n)}$.

L'équation (2.111) « moment partiel d'ordre zéro » est utilisée si Q_0 est imposé tandis que l'équation (2.112) « moment partiel d'ordre un » est utilisée si A_0 est imposé. Lorsque la charge est imposée, c'est (2.112) qui a été retenue (pas de justification claire, en dehors de l'expérience). Il convient toutefois de prendre en compte les cas où ces équations ne fournissent pas d'information ce qui se produit lorsque $\gamma_1 = \delta_1$ (en pratique, régime torrentiel entrant, lié éventuellement à une forte pente descendante i.e. $|\xi_1|$ grand) : on impose dans ce cas le régime critique. Le cas d'un état torrentiel sortant, testé sur la première maille, est traité en imposant a priori $A_0 = A_1$, $Q_0 = Q_1$.

Deuxième cas cas : $E_{amont} \neq E_1$

Dans ce cas on applique en un premier temps la procédure utilisée au paragraphe 2.3.3 : l'état gauche est l'état amont connu complètement au temps t_n , l'état droit est celui de la première maille et on détermine l'état U^- à gauche du point de transition. On applique enfin la méthode mise en oeuvre dans le premier cas en remplaçant $\mathcal{M}_1^n$ par $\mathcal{M}^-$ (voir figure 2.28).

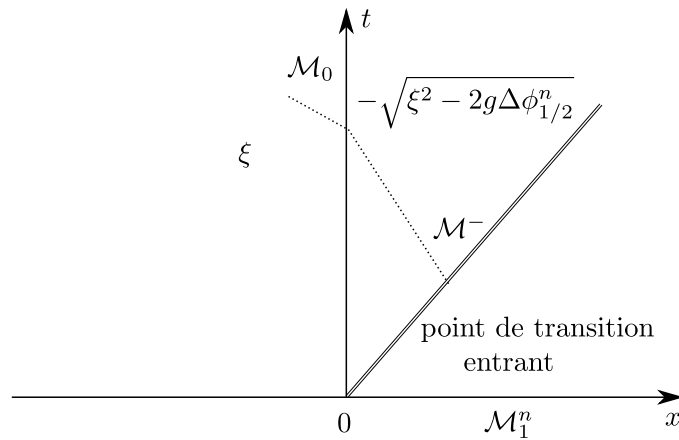


FIGURE 2.28 – Conditions aux limites : amont avec changement d'état

2.3.5 Construction d'un schéma bien équilibré

Dans cette section, on développe une méthode numérique bien équilibrée pour préserver tous les états stationnaires. Cette approche est construite sur l'idée de la matrice à profil stationnaire (c.f. Section 2.2.6). Elle consiste à remplacer les états $\mathbf{U}_{i-1}$ et $\mathbf{U}_{i+1}$ par deux états, dit à profil stationnaire, $\mathbf{U}_{i-1}^+$ et $\mathbf{U}_{i+1}^-$ de sorte que si un état stationnaire se produit alors $\mathbf{F}_{i+1/2}^- - \mathbf{F}_{i-1/2}^+ = 0$. D'autre part, on remplace aussi les termes sources $\mathbf{Z}_{i-1}$ et $\mathbf{Z}_{i+1}$ par des quantités $\mathbf{Z}_{i-1}^+$ et $\mathbf{Z}_{i+1}^-$ qu'on définit ultérieurement. Le terme $\mathbf{Z}$, dans le cadre des équations **PFS**, représente $(x, Z, \cos \theta, S)$ où $\frac{dZ}{dx}$ est la pente dynamique (2.17).

À cet égard, on considère le schéma numérique suivant :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^-(\mathbf{U}_i^n, A_{i+1}^-, Q_{i+1}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_{i+1}^-) - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+(A_{i-1}^+, Q_{i-1}, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{Z}_{i-1}^+, \mathbf{Z}_i) \right), \quad (2.113)$$

les flux numériques sont donnés par :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm, n} = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}(\xi) d\xi. \quad (2.114)$$

où

$$\mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^- = \mathcal{M}_{i+\frac{1}{2}}^-(\mathbf{U}_i, A_{i+1}^-, Q_{i+1}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_{i+1}^-; \Delta\phi_{i+1/2})$$

et

$$\mathcal{M}_{i-\frac{1}{2}}^+ = \mathcal{M}_{i-\frac{1}{2}}^+(A_{i-1}^+, Q_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{Z}_{i-1}^+, \mathbf{Z}_i; \Delta\phi_{i+1/2})$$

pour lesquels on écrit explicitement la dépendance en $\mathbf{Z}$.

On définit les états gauche A_{i+1}^- et droit A_{i-1}^+ à partir de l'état stationnaire :

$$\forall i, \begin{cases} D(A_{i+1}^-, Q_{i+1}, \mathbf{Z}_i) &= D(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{Z}_{i+1}) \\ D(A_{i-1}^+, Q_{i-1}, \mathbf{Z}_i) &= D(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{Z}_{i-1}) \end{cases} \quad (2.115)$$

où $D(\mathbf{U}, \mathbf{Z})$ est la charge totale donnée par :

$$\frac{Q^2}{2A} + \begin{cases} g\mathcal{H}(A) + gZ & \text{si } E = 0, \\ c^2 \ln\left(\frac{A}{S}\right) + g\mathcal{H}(A) + gZ & \text{si } E = 1. \end{cases}$$

On définit le couple $(\mathbf{Z}_{i+1}^-, \mathbf{Z}_{i-1}^+)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{i+1}^- &= \begin{cases} \mathbf{Z}_i & \text{si } A_{i+1}^- = A_i \\ \mathbf{Z}_{i+1} & \text{si } A_{i+1}^- \neq A_i \end{cases} \\ \mathbf{Z}_{i-1}^+ &= \begin{cases} \mathbf{Z}_i & \text{si } A_{i-1}^+ = A_i \\ \mathbf{Z}_{i-1} & \text{si } A_{i-1}^+ \neq A_i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Alors,

Théorème 2.3.4. *le schéma numérique (2.113)-(2.116) préserve tous les états d'équilibres discrets.*

Preuve du Théorème 2.3.4 :

Le flux numérique considéré est clairement consistant, i.e.

$$\forall U, Z, \mathbf{F}_{i+1/2}^-(U, U, Z, Z) = \mathbf{F}_{i-1/2}^+(U, U, Z, Z) = \mathbf{F}(U)$$

où $\mathbf{F}$ est le flux du modèle continu.

Supposons qu'il existe n tel que pour tout i :

$$Q_i^n = Q_0, D(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{Z}_i) = h_0,$$

alors :

$$D(A_{i+1}^-, Q_{i+1}, \mathbf{Z}_i) = D(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{Z}_{i+1}) = h_0, \forall i$$

et en particulier, on a :

$$D(A_{i+1}^-, Q_{i+1}, \mathbf{Z}_i) = D(\mathbf{U}_i, \mathbf{Z}_i).$$

Pourvu que les états A_{i+1}^- et A_i soit proche, l'application $A \rightarrow D(A, Q, Z)$ est injective. Il en résulte $A_{i+1}^- = A_i$ et donc $\mathbf{Z}_{i+1}^- = \mathbf{Z}_i$ par définition (2.116). De la même manière, on aboutit à $A_{i-1}^+ = A_i$ et $\mathbf{Z}_{i-1}^+ = \mathbf{Z}_i$. Grâce à la propriété de consistance du flux numérique, on a :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^-(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^-, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_{i+1}^-) - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+(\mathbf{U}_{i-1}^+, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{Z}_{i-1}^+, \mathbf{Z}_i) = 0,$$

d'où $\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n$. ■

Remarque 2.3.11. *Le schéma numérique présenté est valable pour tout flux numérique consistant.*

Dans le cas d'un état stationnaire mixte, on applique alors le même procédé que celui décrit à la Section 2.2.6.3 pour un état stationnaire à vitesse nulle. En effet, un stationnaire mixte à vitesse non nulle est caractérisé par une vitesse de transition constante en temps. Il suffit donc d'imposer l'égalité des quantités à l'interface de transition.

2.3.6 Quelques simulations numériques

Dans cette section, on présente les résultats numériques issues des articles [14, 15] et le cas test de Wiggert [105] pour valider l'approche FKA. Par ailleurs, on compare cette méthode de suivi d'interface avec celle des « ondes fantômes ».

2.3.6.1 Validation numérique du modèle en charge

La validation numérique du schéma cinétique en charge a été effectuée dans le cadre de la simulation d'un coup de bélier dans une conduite uniforme. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux fournis par un code industriel EDF-CIH (c.f. Winckler [107]), résolvant les équations d'Allievi (voir introduction Chapitre 1) par une méthode des caractéristiques. Ce code appelé *belier* est spécialement conçu pour traiter les coups de bélier.

Le schéma cinétique pour une conduite à section variable a été également validé dans le cas de la simulation d'un coup de bélier. Les résultats obtenus sont en parfait accord avec la méthode des tuyaux équivalents [1] (c.f. Annexe B).

Cas test en conduite uniforme.

On présente quelques simulations numériques de coup de béliet en conduite uniforme. La conduite est circulaire, de longueur 2000 m et de section 2 m^2 . L'épaisseur de la conduite est de 20 cm et le module de Young est de $23 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ (configuration réelle). La pente de la conduite est de 5° , et l'altitude à l'amont est 250 m. La vitesse d'onde en charge est $c = 1400 \text{ m/s}$.

La charge totale à l'amont au temps $t = 0$ est 300 m. Le débit initial à l'aval est $10 \text{ m}^3/\text{s}$. On coupe le débit d'eau en 10 secondes (correspondant à la fermeture d'une vanne) pour le premier cas test et en 5 secondes pour le deuxième.

Pour ces simulations, on impose une CFL de 0.8 et une discrétisation spatiale de 1000 points. Aux figures 2.31 et 2.32, on compare les résultats obtenus par le schéma cinétique, appelé **cinemix**², et le code **belier**. On trace la courbe de débit en milieu de conduite en fonction du temps. On observe que les résultats obtenus sont en parfait accord. Un effet régularisant est due à la discrétisation du premier ordre.

Cas test en conduite non uniforme.

On considère une série de conduite à section circulaire convergente et divergente de longueur $L = 1000 \text{ m}$. Le rayon à l'aval est constant égal à $R_2 = 1 \text{ m}$ tandis que celui de l'amont varie de $R_1 = 1 \text{ m}$ à 4 m par un pas de 0.25 m . Les autres paramètres sont $N = 300$ (nombres de mailles), $K_s = 9000$ (correspondant à une faible friction) et la CFL= 0.8.

On impose une charge totale à l'amont constante au cours du temps. Le débit à l'aval est constant égale à $10 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ jusqu'à $t = 1.5$ secondes, puis on coupe le débit.

On calcule pour chaque conduite R_1 , le maximum de pression au point $x = 96 \text{ m}$ qu'on compare à celui obtenu avec la « conduite équivalente » (c.f. Adamkowski [1]). Les résultats sont présentés à la figure 2.29. Aux figures 2.33, 2.34, 2.35, on observe bien que les deux méthodes captent

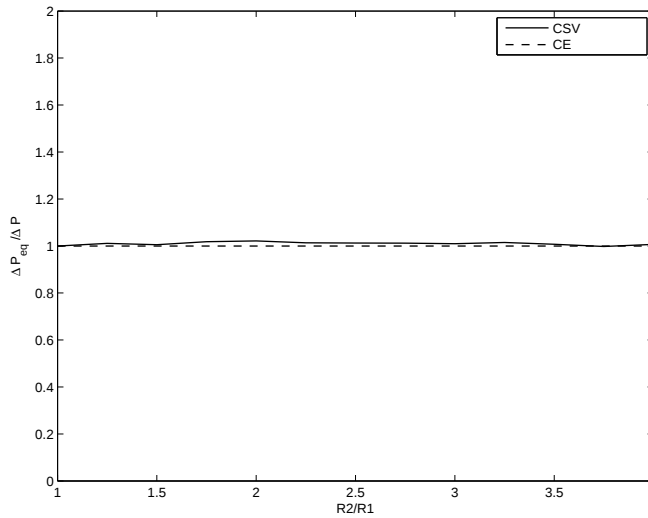


FIGURE 2.29 – Comparaison des résultats avec la méthode des conduites équivalentes

CSV : conduite à section variable

CE : conduite équivalente

bien le maximum de pression, que les comportements dynamiques du débit et de la hauteur

2. Le code **cinemix** est la première version du code cinétique. Il était alors combiné à la méthode des « ondes fantômes ». Il a ensuite été rebaptisé en **FLOWMIX** une fois que la méthode FKA a remplacé l'approche précédente.

piezométrique sont vraiment différents. Ceci s'explique par la présence du terme $c^2 \frac{d}{dx} \ln S$ dans le modèle en charge qui apporte les informations manquantes dans le modèle des tuyaux équivalents. En d'autre terme, la méthode des tuyaux équivalents permet seulement de calculer le maximum de pression contrairement au modèle en charge.

2.3.6.2 Validation numérique du modèle mixte

On présente dans cette section, un test de validation numérique du schéma cinétique par comparaison avec le schéma VFRoe (c.f. Section 2.2). Un deuxième test est effectué pour valider le décentrement de la friction dans un écoulement symétrique. On compare les résultats avec le schéma cinétique pour lequel le terme de friction est centré. Enfin, pour terminer, on présente le cas test proposé par Wiggert [105] afin de valider l'approche FKA et de comparer les deux méthodes de suivis d'interface.

Cas test mixte.

On considère une conduite de 5 m de long à section divergente de 2 m de rayon à l'amont et 2.2 m à l'aval. On ne prend pas en compte le terme de friction dans ce test car il s'agit de valider le décentrement des autres termes sources.

La simulation débute avec un état stationnaire à surface libre à vitesse nulle. La hauteur piezométrique à l'amont croît linéairement de 1 m à 3.2 m en 5 s. À l'aval, on maintient un débit nul.

Les autres paramètres sont $N = 100$ (nombres de mailles) et $CFL = 0.8$.

Bien qu'on ait pas de cas tests issus de l'expérimentation, la comparaison des deux schémas est assez significative. En particulier, les courbes de débit sont en parfait accord tandis que le schéma cinétique a tendance à lisser d'avantage et à atténuer les pics de pression (voir FIG. 2.36).

Validation numérique du décentrement de la friction.

On présente ici un test, non réaliste, dans le cadre d'un écoulement symétrique dans une conduite uniforme de 100 m et 2 m de diamètre. Le but de la simulation est de montrer que le décentrement du terme de friction, sous la forme d'une pente dynamique, est de loin meilleur que celui centré, i.e. traité sous la forme $K(x_i, A_i^n) u_i^n |u_i^n|$. Pour distinguer ces deux approches, on note dans la suite SCD, Schéma Cinétique Décentré (avec le terme de pente dynamique) et SCC, Schéma Cinétique Centré (avec le terme de friction centré). Pour illustrer cela, on fait varier le coefficient de friction K_s . L'état initial est représenté à la figure 2.30. Il correspond à une *double rupture de barrage*.

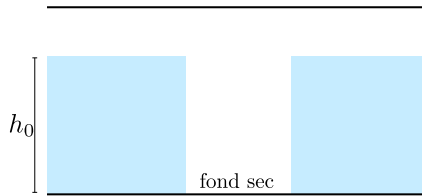


FIGURE 2.30 – État initial : double rupture

Les hauteurs piezométriques amont et aval croissent linéairement de 1 m à 2.1 m en 20 secondes. D'un point de vue physique, on s'attend à un écoulement symétrique.

Les résultats des figures 2.37-2.38 illustrent bien que le SCC ne conserve pas la symétrie de l'écoulement ; en particulier, au temps $t = 8.047$ (voir FIG. 2.38 (en haut)) on observe déjà une petite dissymétrie pour $K_s = 100$ et qui évolue de manière catastrophique au temps $t = 3.492$ pour $K_s = 10$ (c.f. FIG. 2.37). Précisons que le traitement des conditions aux limites amont et aval est, lui, parfaitement symétrique dans le code numérique.

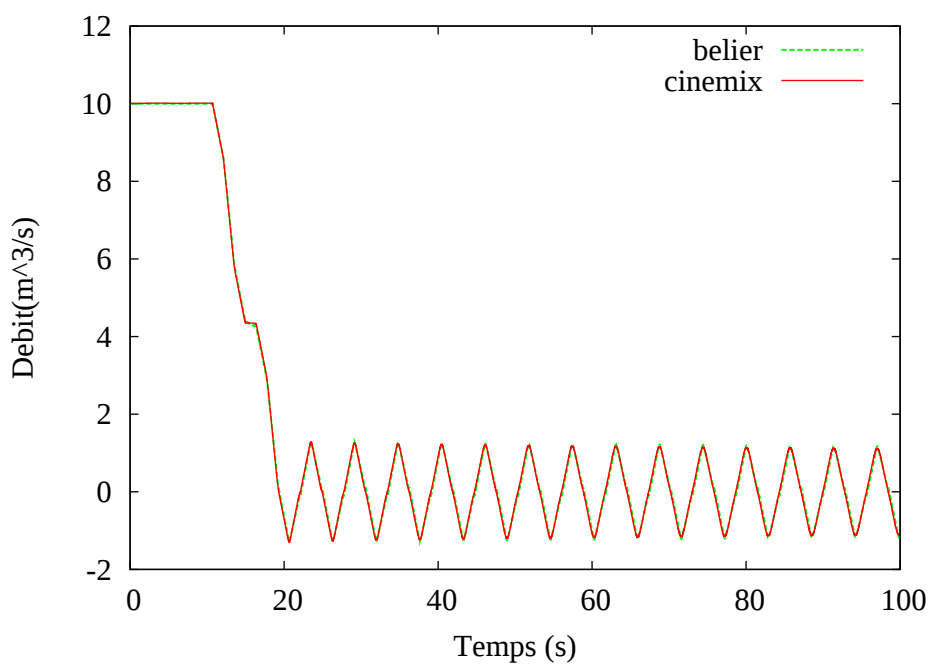


FIGURE 2.31 – Cas test 1 : coupure de débit en 10 s

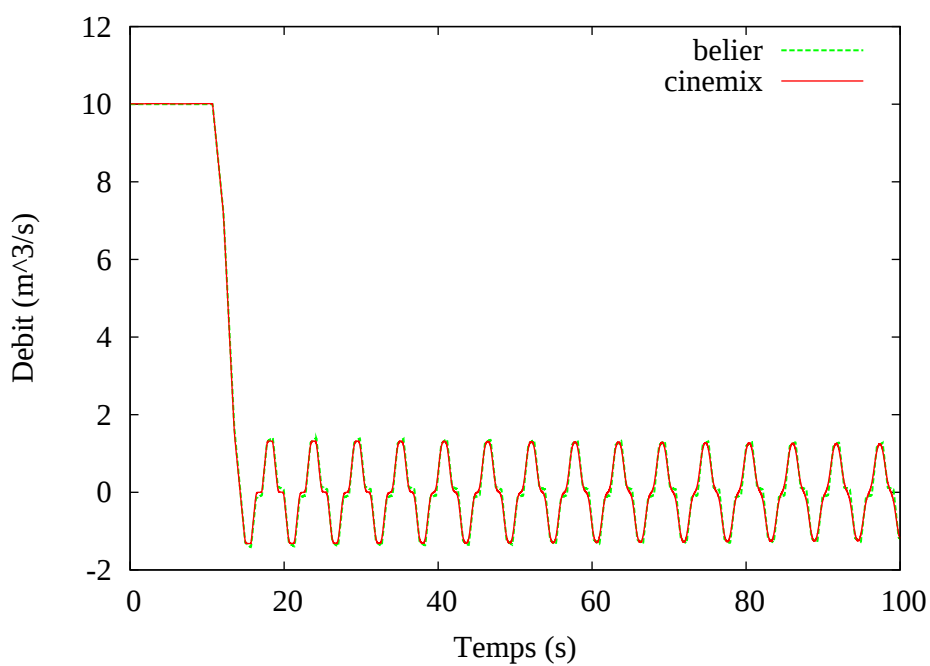
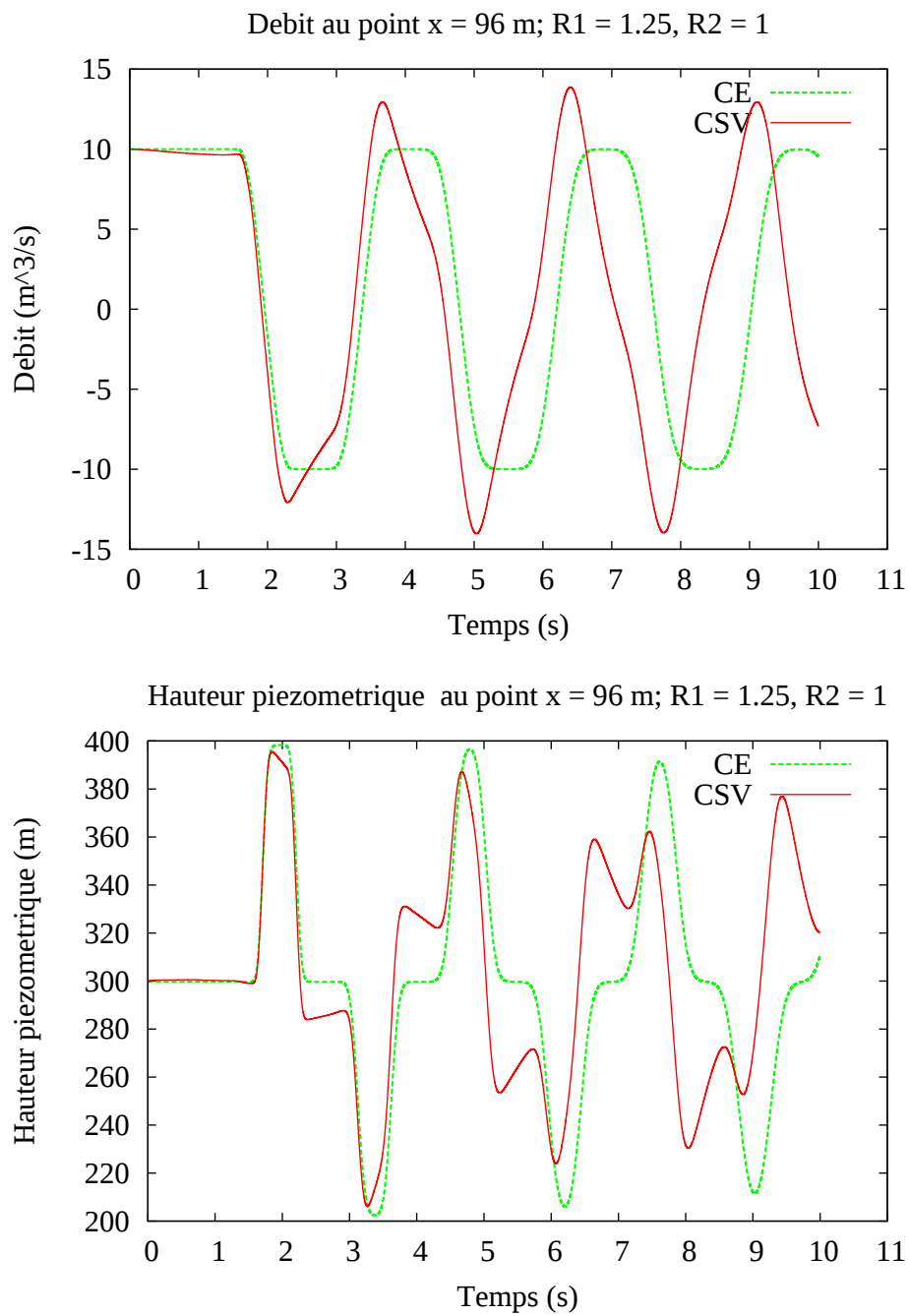


FIGURE 2.32 – Cas test 2 : coupure de débit en 5 s

FIGURE 2.33 – Débit et hauteur piezométrique pour $R_1 = 1.25$ m

CSV : conduite à section variable

CE : conduite équivalente

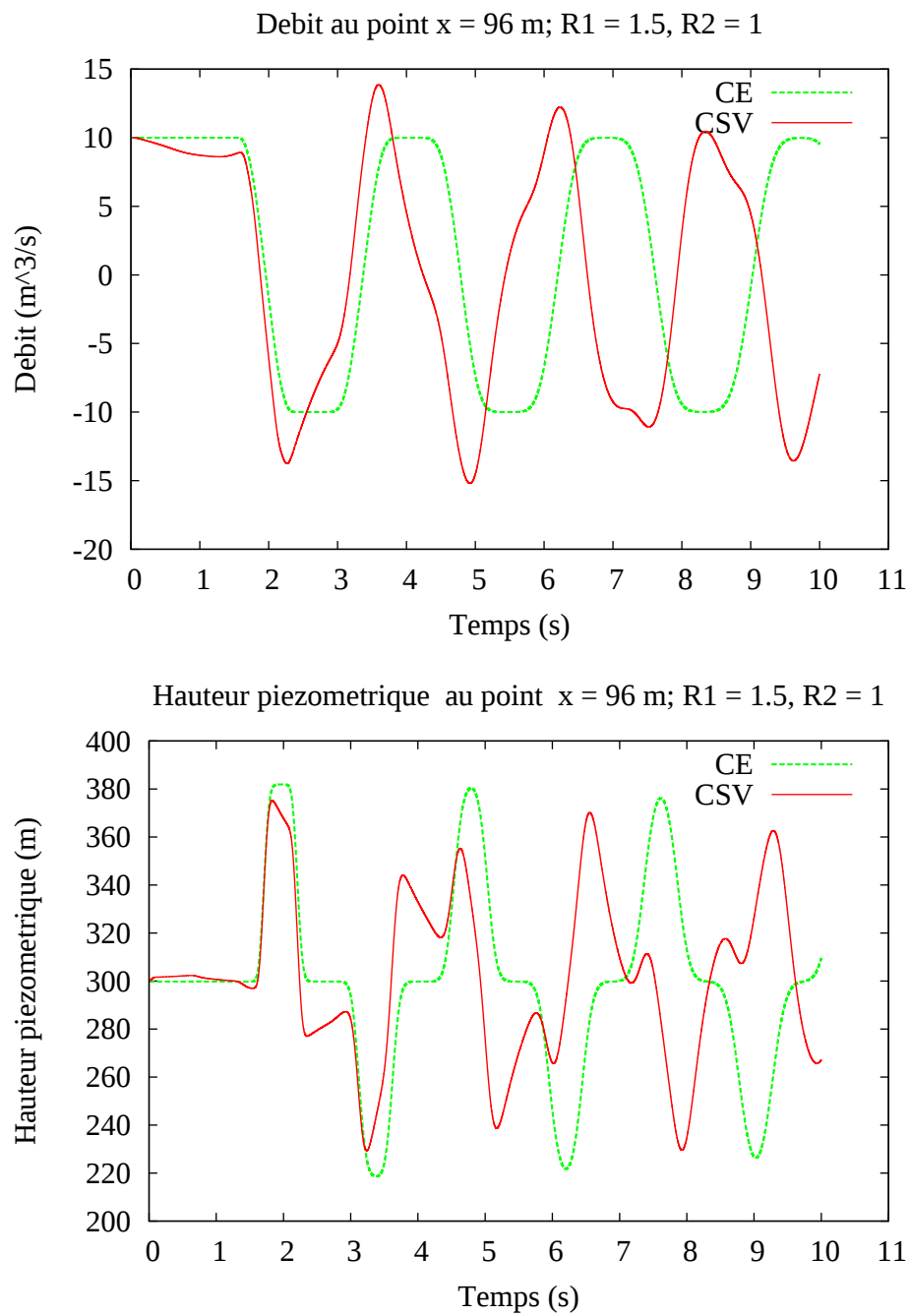
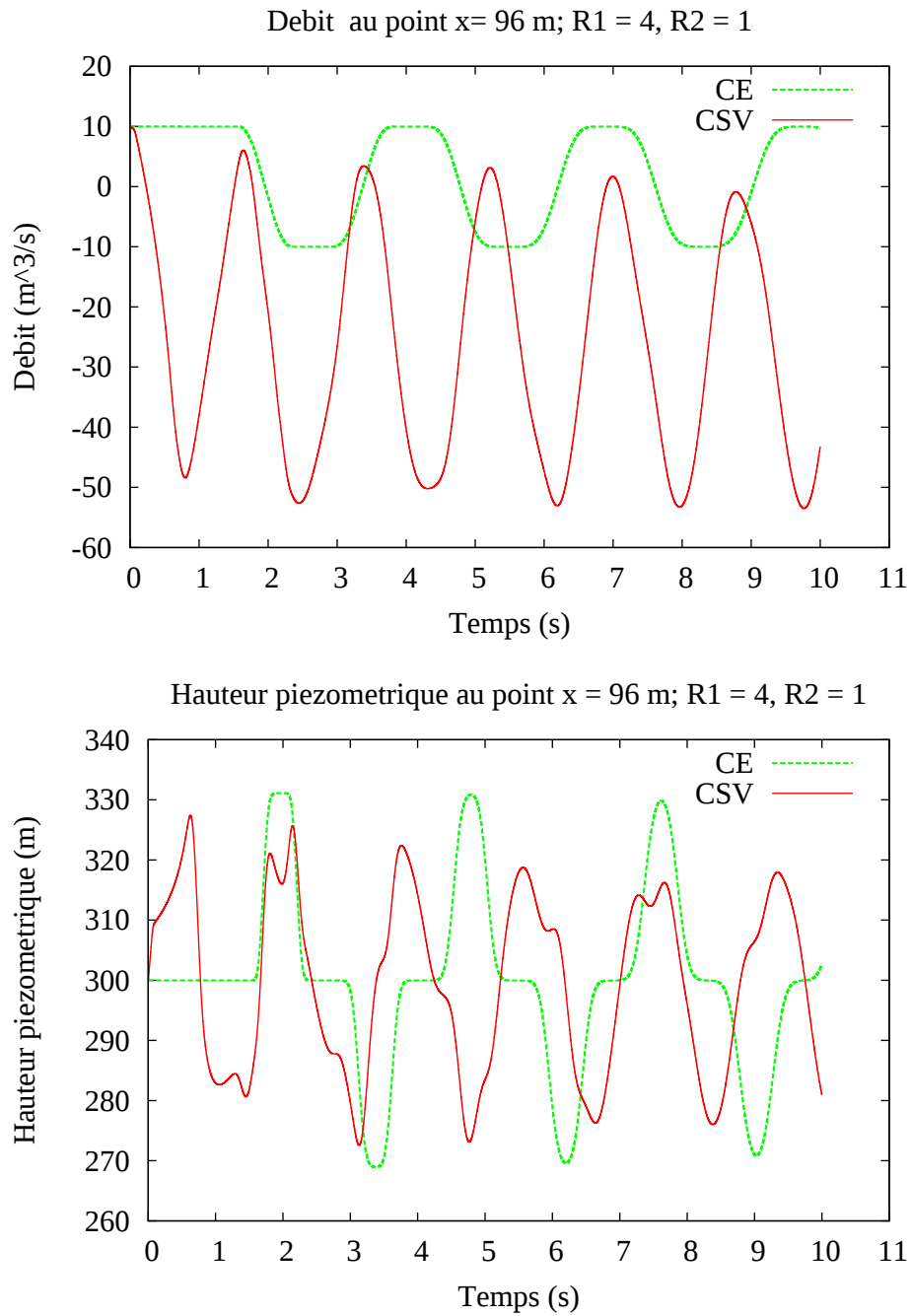


FIGURE 2.34 – Débit et hauteur piezométrique pour $R_1 = 1.5$ m
 CSV : conduite à section variable
 CE : conduite équivalente

FIGURE 2.35 – Débit et hauteur piezométrique pour $R_1 = 4$ m

CSV : conduite à section variable

CE : conduite équivalente

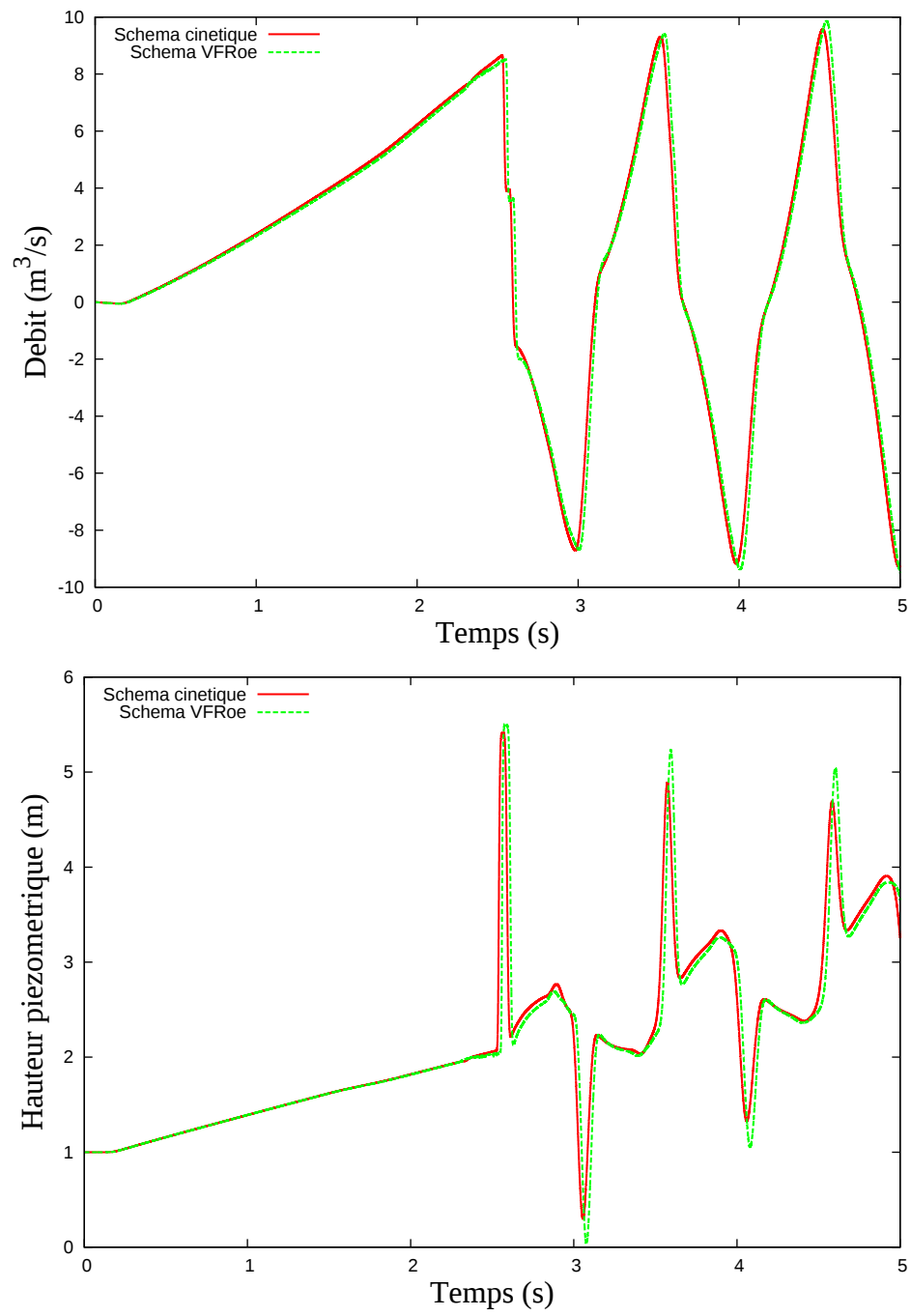
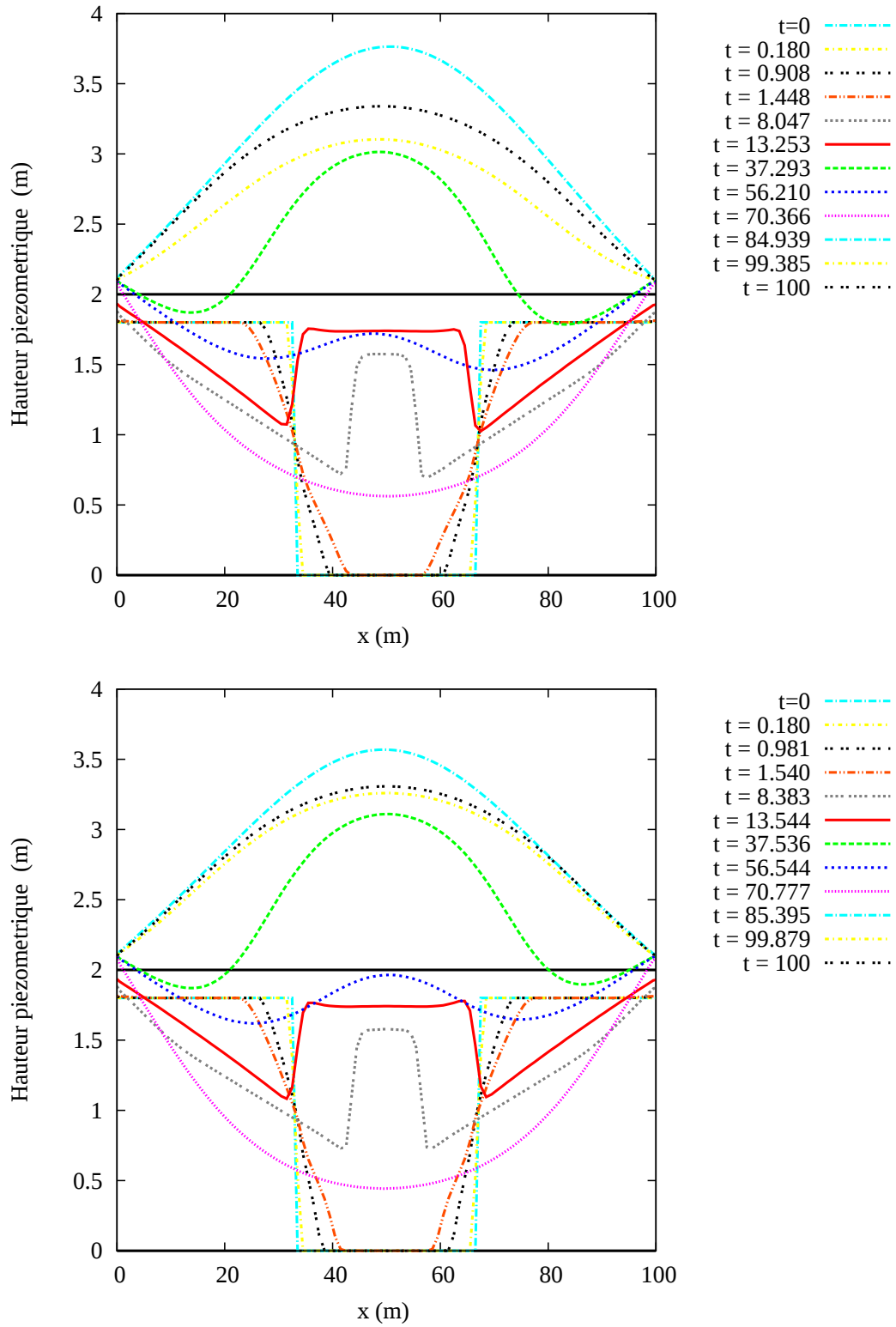
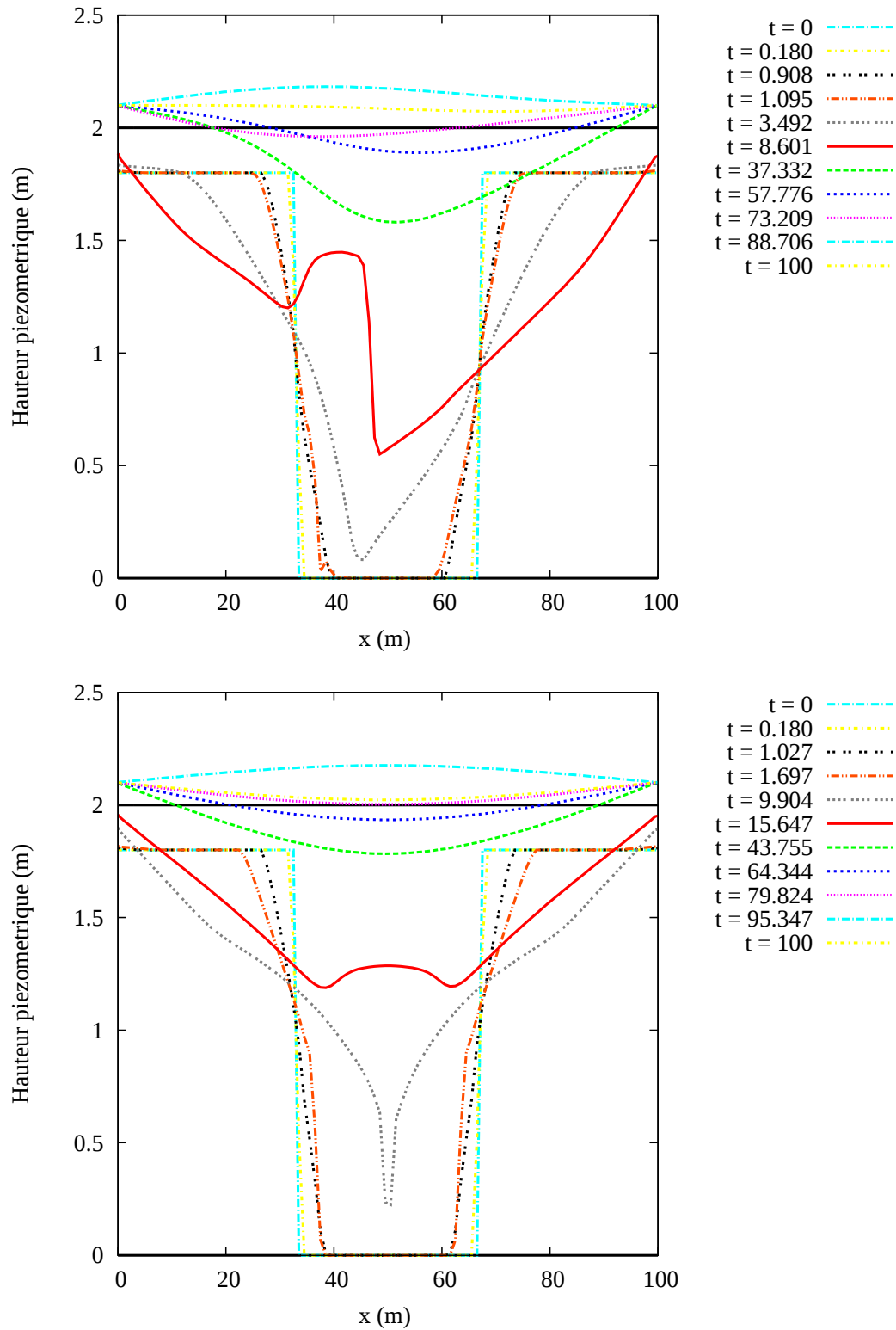


FIGURE 2.36 – Schéma cinétique et VFRoe
Débit et hauteur piezométrique au point $x = 0.5 \text{ m}$.

FIGURE 2.37 – Comparaison des schémas SCD et SCC pour $K_s = 100$.

En haut : SCC

En bas : SCD

FIGURE 2.38 – Comparaison des schémas SCD et SCC pour $K_s = 10$.

En haut : SCC

En bas : SCD

Cas test de Wiggert et comparaison de la vitesse d'interface.

Ce test est proposé dans [105] et repris comme test de validation numérique par plusieurs auteurs, par exemple, [6, 51, 104] et en particulier dans [17]. Il a l'avantage de concerner une géométrie simple (section rectangulaire et horizontale) qui permet ainsi d'évacuer toute difficulté numérique que l'on peut rencontrer en géométrie circulaire. De plus, durant cette expérience, il n'y a qu'un seul point de transition, ce qui rend facile la mise en œuvre d'un tel cas test.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure suivante :

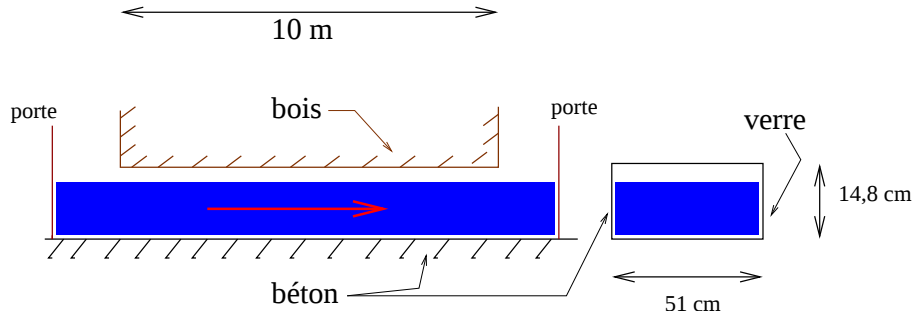


FIGURE 2.39 – Dispositif

L'état initial est un stationnaire à vitesse nulle (i.e. $Q = 0$) et à surface libre.

La hauteur d'eau à l'amont est pilotée de façon à provoquer un passage en charge puis une descente à surface libre (cf. hydrographe amont, figure 2.41). La hauteur d'eau aval est maintenue constante jusqu'à l'arrivée du front (cf. hydrographe FIG. 2.41).

Les constantes du schéma sont :

Manning	: 0.012,
Nombre de mailles	: 80,
Delta x (m)	: 0.125,
Coefficient de CFL	: 0.5,
Durée de la simulation (s)	: 18.

Dans la suite, on effectue successivement des tests pour une vitesse d'onde en charge de $c = 9 \text{ m/s}$, $c = 20 \text{ m/s}$, $c = 40 \text{ m/s}$ et $c = 100 \text{ m/s}$. À cause de fortes oscillations, les résultats pour $c = 1400 \text{ m/s}$ ne seront pas représentés.

Les conditions limites amont et aval (c.f. FIG. 2.41) ont été reconstruites par interpolation polynomiale à partir des données expérimentales de Wiggert (Fig. 2.40, courbe y2 pour l'amont et y3 pour l'aval). Les données ont été reprises dans [17].

Les mesures (hauteurs piezométriques au dessus du fond du canal) sont effectuées aux points notés 3,5m, 5,5m que l'on compare aux mesures (hB) et (hC) de la figure 2.40. À titre de comparaison, on trace le profil obtenu par Garcia-Navarro *et al.* [51] (qui utilise la méthode de la fente de Preissmann), l'approche FKA et les « ondes fantômes ». Une analyse approfondie montre qu'il y a un léger écart, n'excédant pas 0.15 s au point de passage en charge par rapport aux données de Wiggert ou de celles de Garcia-Navarro. Aux figures 2.44–2.51, on présente les résultats obtenus par les deux approches, FKA et « ondes fantômes », pour les points (hB) (i.e $x = 3.5 \text{ m}$) et (hC) (i.e $x = 5.5 \text{ m}$) auxquelles on ajoute les points issues de l'expérience de Wiggert (c.f. FIG. 2.40) pour pouvoir comparer. On observe qu'en dépit des oscillations, la valeur moyenne des profils obtenus est indépendante de la valeur de c (cette constatation sera

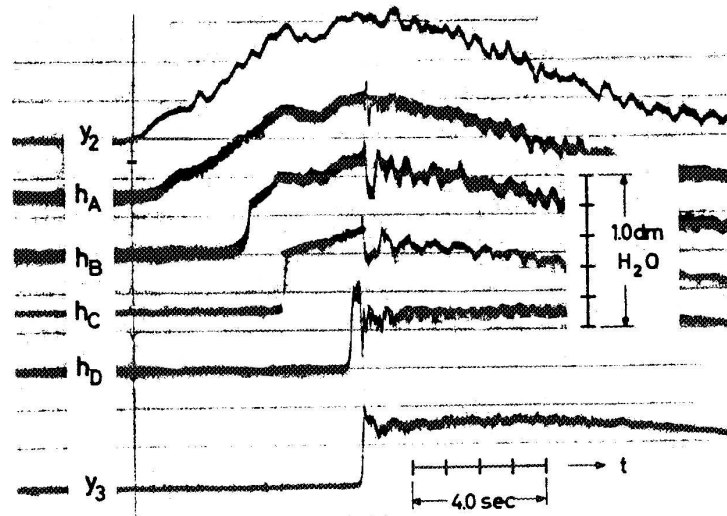


FIGURE 2.40 – Test de Wiggert : mesures

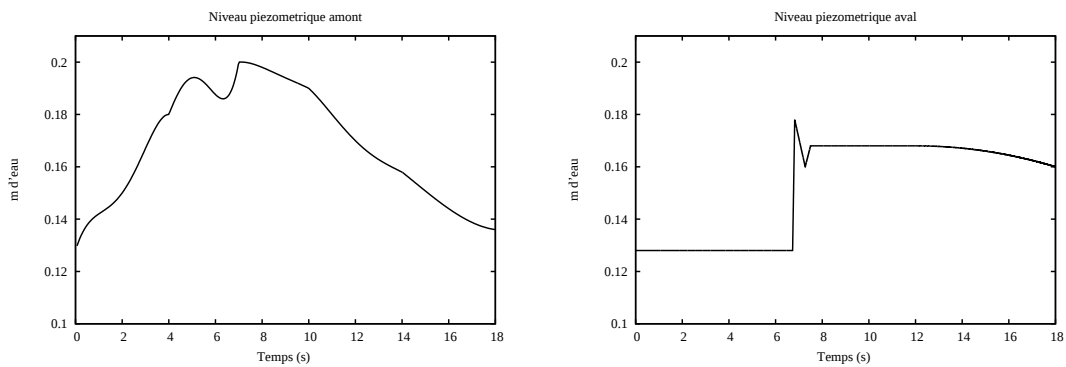


FIGURE 2.41 – Test de Wiggert : hydrographe amont et aval

observée de manière plus précise sur les profils de vitesse de l'interface dans la suite). Ces oscillations sont provoquées par les fluctuations de pression qui accompagnent le mouvement de l'interface et dont leur fréquence dépend directement de la vitesse d'onde en charge c . En effet, plus la valeur de c est grande et plus les oscillations localisées au point de passage en charge, approximativement $x = 3.8 \text{ m}$ pour (hB) (c.f. FIG. 2.44,2.46,2.48 et 2.50) et $x = 4.5 \text{ m}$ pour (hC) (c.f. FIG. 2.45,2.47,2.49 et 2.51). Au delà de ces points l'onde de surpression s'amortie. On constate de plus que les profils fournis par l'approche FKA et « ondes fantômes » sont en excellent accord pour de faible valeur de c (c.f. FIG. 2.44,2.46,2.48 pour l'expérience (hB) et FIG. 2.45,2.47,2.49 pour (hC)) alors que des différences d'amplitudes de ces ondes sont observées d'un schéma à l'autre (c.f. FIG. 2.50 et FIG. 2.51).

D'autre part, en vue de comparer les deux approches, on a tracé la vitesse de l'interface au cours du temps pour les différentes valeurs de c : $c = 9 \text{ m/s}$, $c = 20 \text{ m/s}$, $c = 40 \text{ m/s}$ et $c = 100 \text{ m/s}$. Les résultats sont représentés figures 2.52–2.59.

À titre de comparaison entre les deux méthodes de suivis d'interface, on a représenté aux figures 2.52, 2.54, 2.56 et 2.58, la vitesse de l'interface w lors de la montée en charge, i.e pour

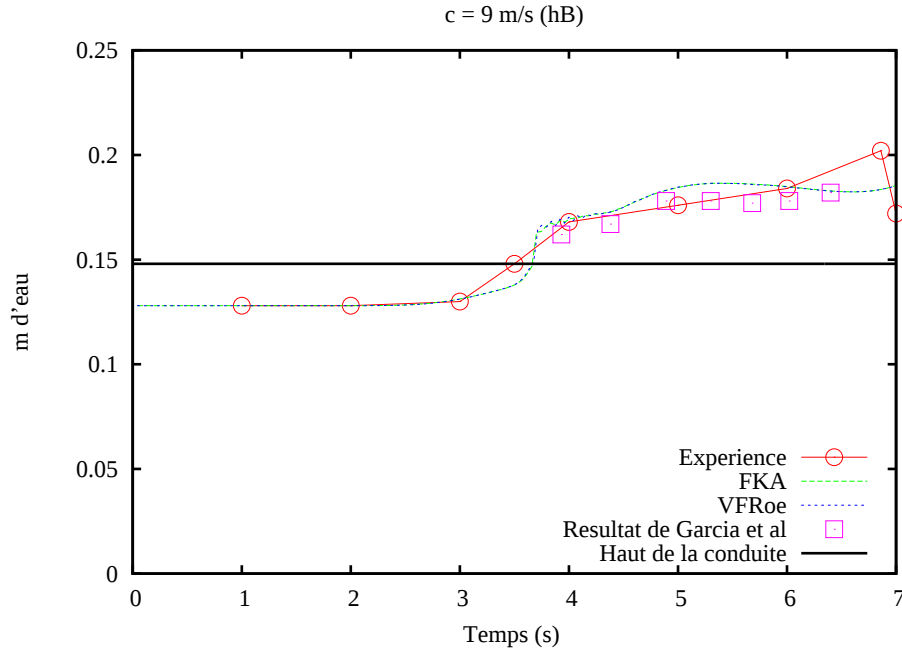


FIGURE 2.42 – Test de Wiggert avec l'approche FKA, « ondes fantômes » et les résultats de Garcia-Navarro pour une vitesse d'onde en charge de 9 m/s en $x = 3.5 \text{ m}$

$2 < t < 7$ approximativement. En raison des oscillations présentes, on a également tracé les interpolés par les courbes de bézier aux figures 2.53, 2.55, 2.57 et 2.59 qui rendent plus facile la lecture de ces résultats.

Pour représenter la stabilité des deux méthodes de suivis d'interface par rapport à la vitesse d'onde, on a tracé aux figures 2.60 (avec interpolation c.f. FIG. 2.61) et 2.62 (avec interpolation c.f. FIG. 2.61) la vitesse d'interface pour la montée en charge pour différentes valeurs de c . Le résultat de cet test est très satisfaisant car il permet d'illustrer que les deux approches sont pratiquement pas influencées par c . De plus, on les compare à la courbe de prédiction³, calculée par la formule $w = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, où on constate certaines différences dans les tracés. Le comportement observé est identique : à savoir, la vitesse d'interface atteint rapidement un maximum puis décroît et augmente à nouveau à proximité de la sortie (c.f. FIG. 2.60 et FIG. 2.62).

Enfin, pour terminer, en vue de justifier le fait que les simulations pour $c = 1400 \text{ m/s}$ ne sont pas présentées, on rappelle que, comme il a été souligné dans [17] ou dans [96], la vitesse du son en charge est sensible à la quantité d'air piégée dans l'eau : 1400 m/s pour l'eau pure, 600 m/s pour une concentration d'air de 0.1% en volume, 300 m/s pour une concentration de 0.45%. De plus, il paraît clair que cette concentration n'est pas la même au long de la conduite, ce qui devrait conduire à considérer une vitesse d'onde variable. Par ailleurs, les propriétés mécaniques de la conduite, la vitesse du son dépend du matériau par son coefficient de Young (i.e. module d'élasticité qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et la déformation pour un matériau élastique isotrope).

Dans [17], la conclusion tirée de ce test est :

3. La courbe a été reconstruite par interpolation par spline à partir des données de Wiggert [105] (c.f. FIG. 2.43).

« la valeur de c à adopter dépend du type de phénomène à observer : pour prédire la position et la vitesse de l'interface, ainsi que le saut de pression associé, une faible vitesse de c , de l'ordre de 20 m/s par exemple, suffit et a l'avantage de permettre des calculs très rapides (attention toutefois à ne pas descendre en dessous de la vitesse d'onde à surface libre) ».

Par conséquent, compte tenu des résultats obtenus et dans ces conditions, les deux approches sont en accord. Ce qui permet de clore ce chapitre.

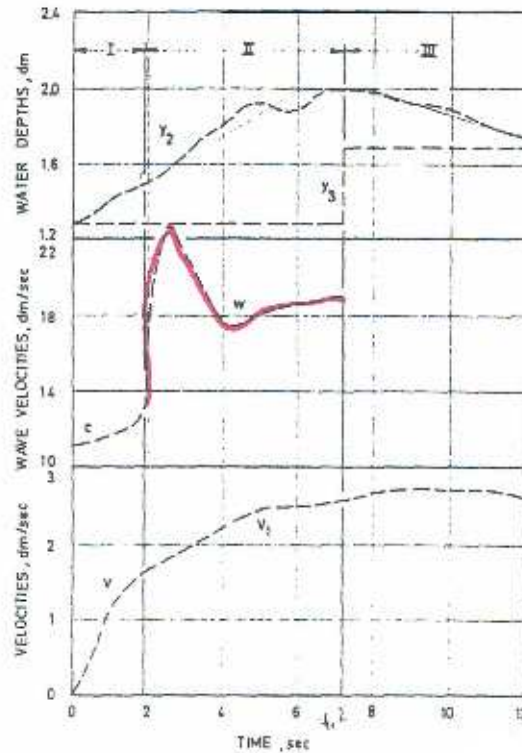
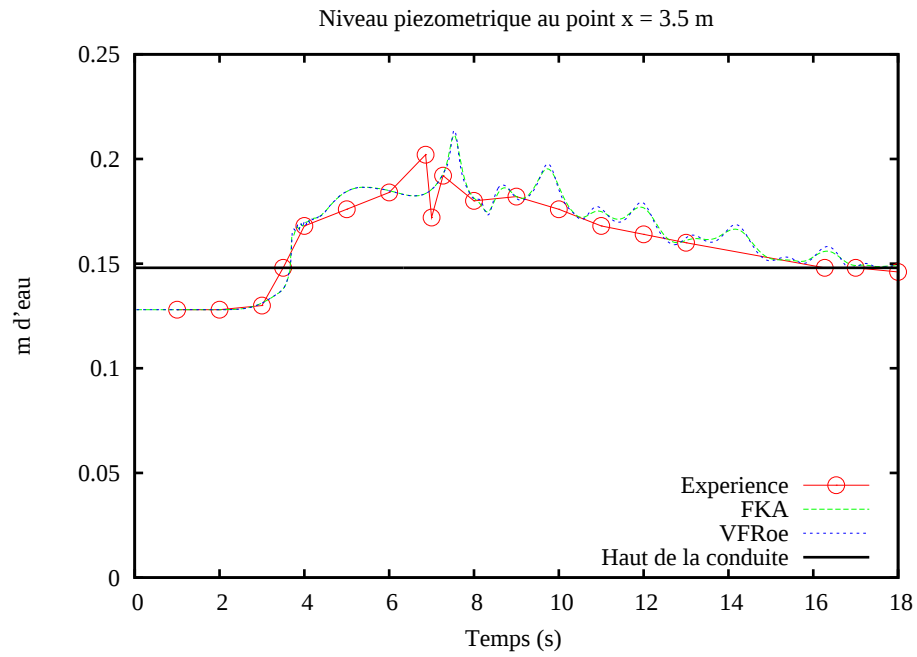
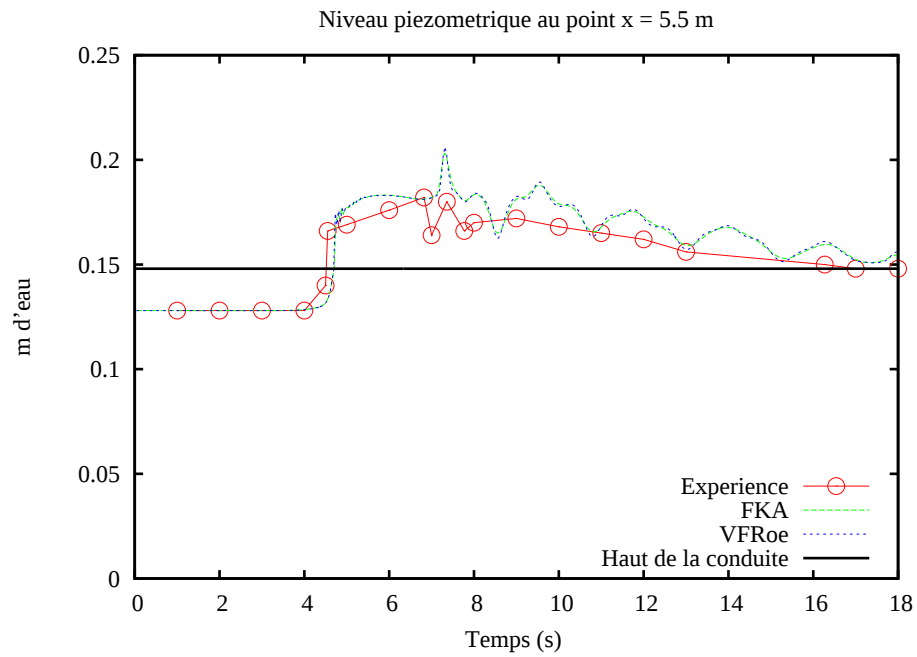
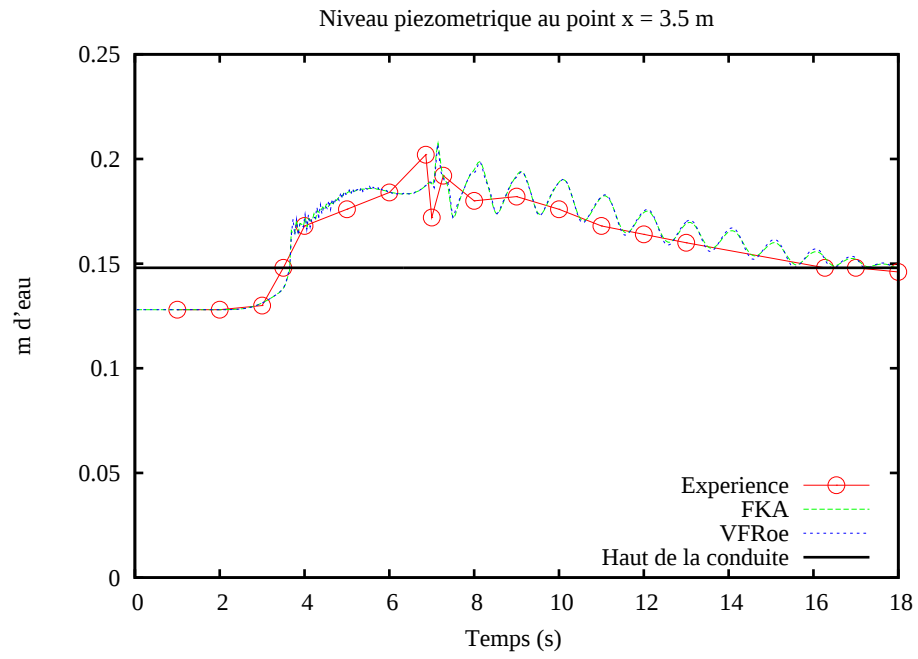
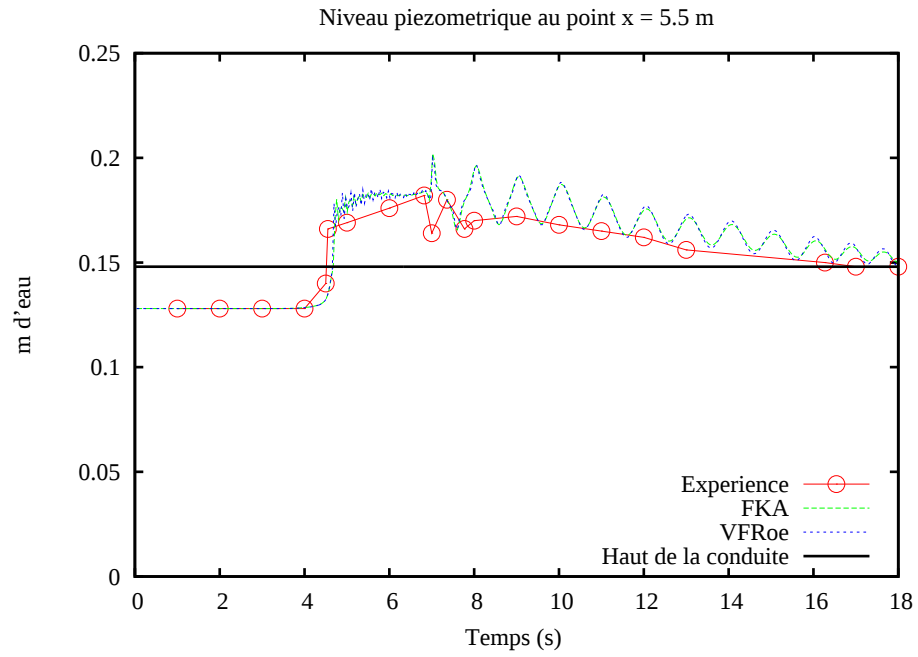
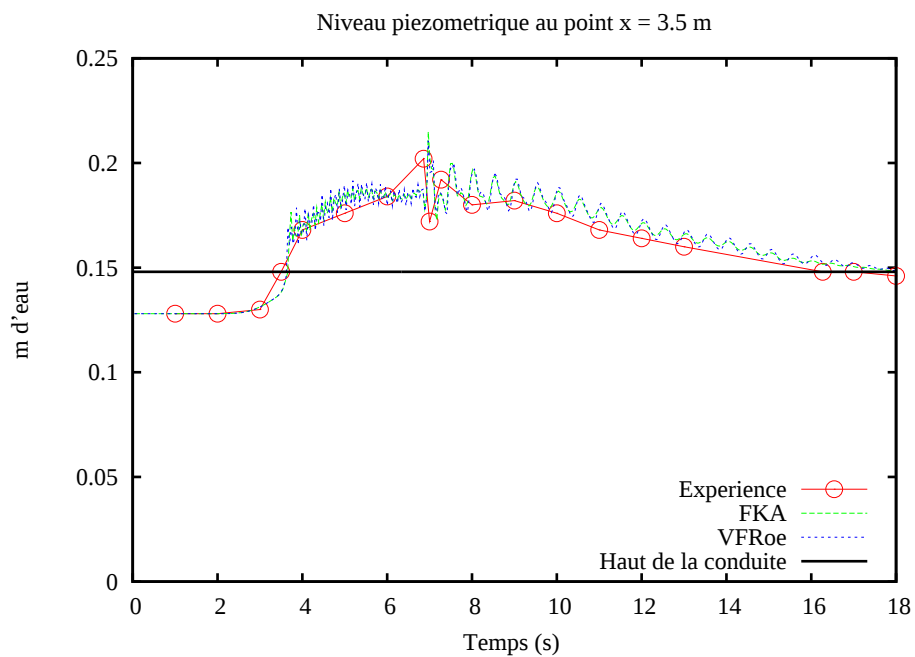
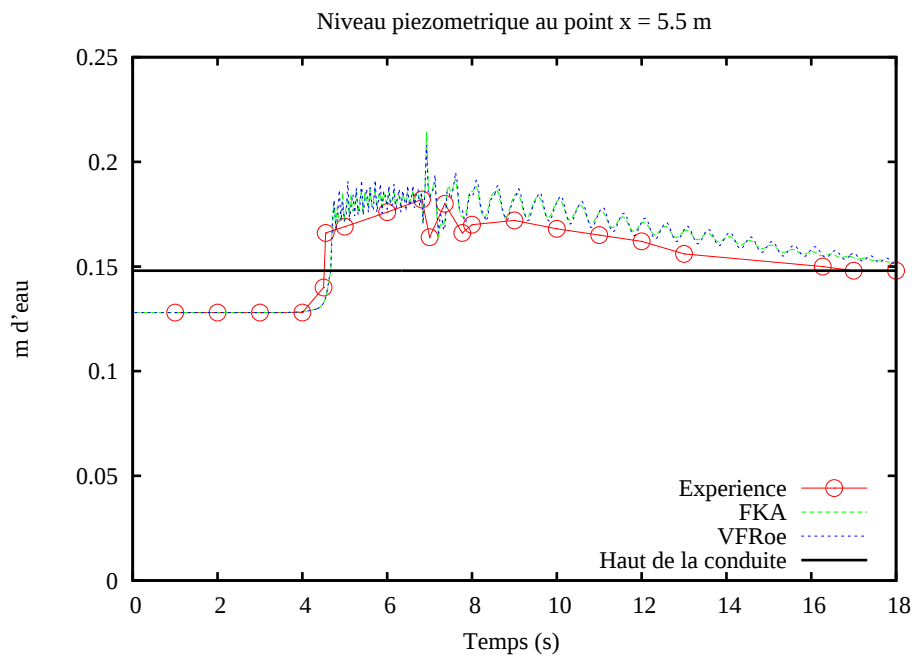
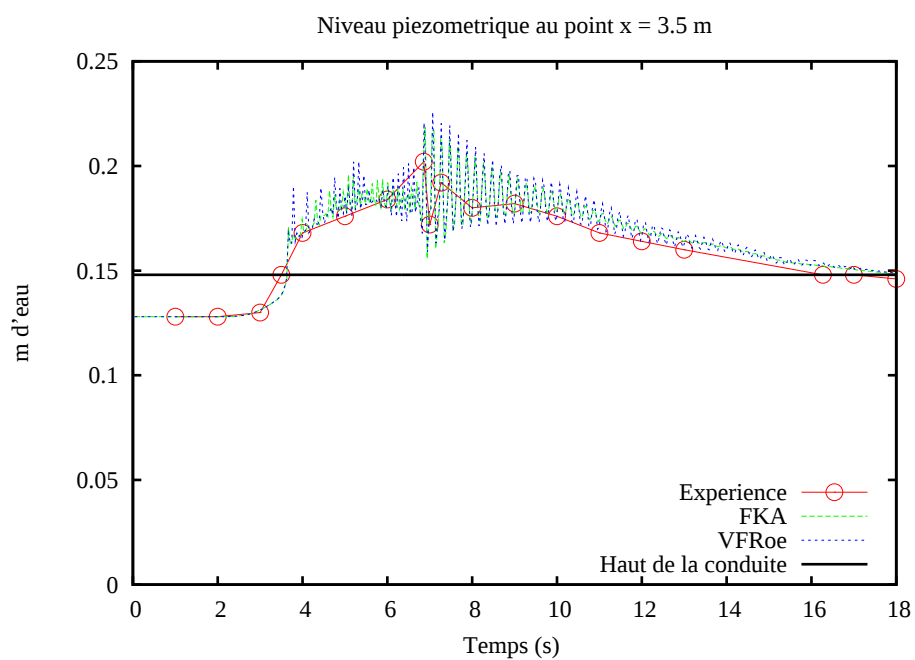
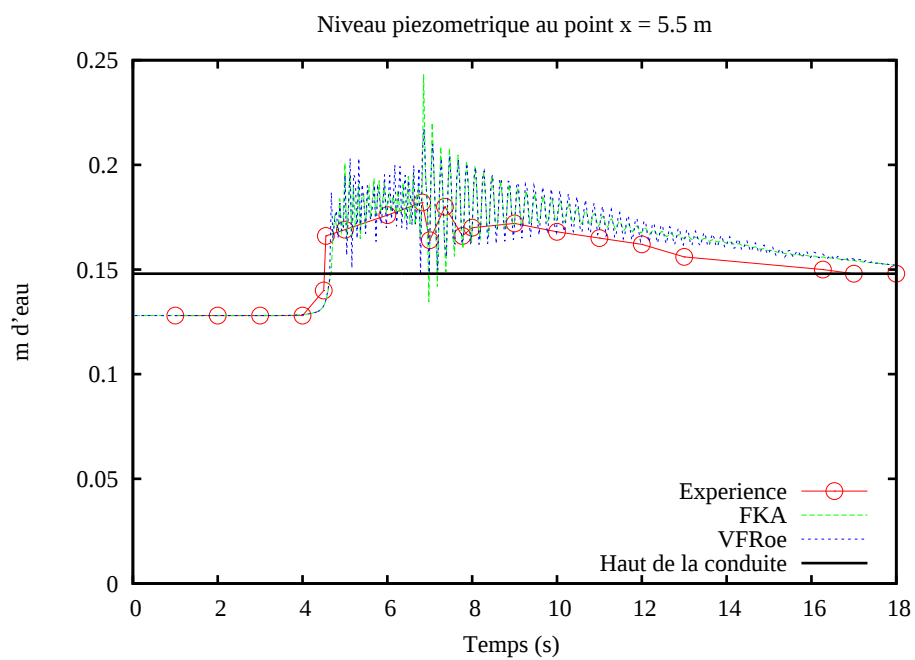


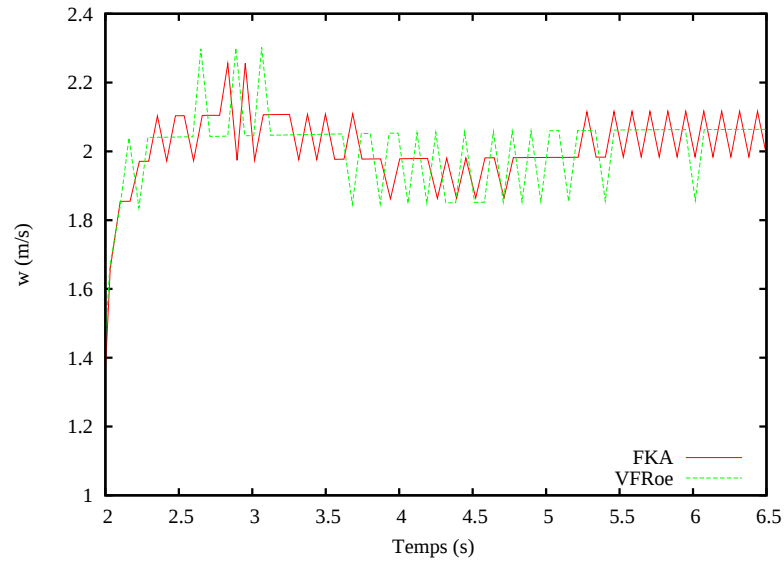
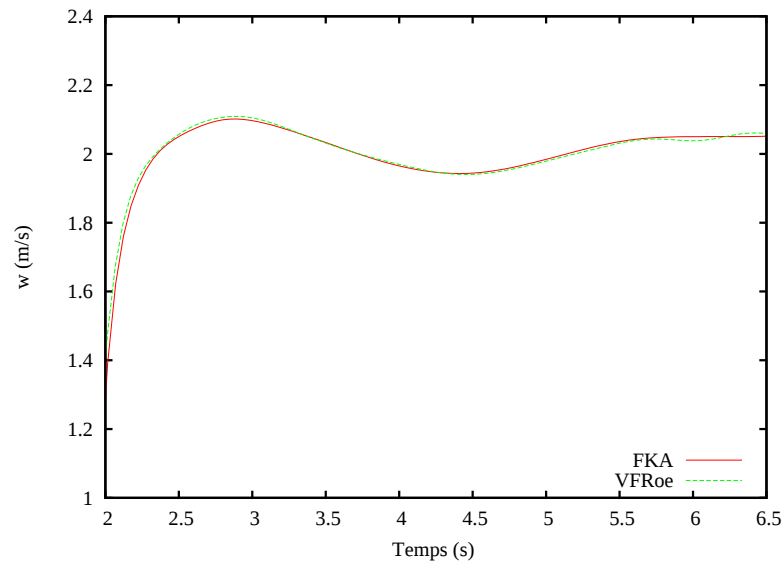
FIGURE 2.43 – Test de Wiggert : prédiction de la vitesse d'interface

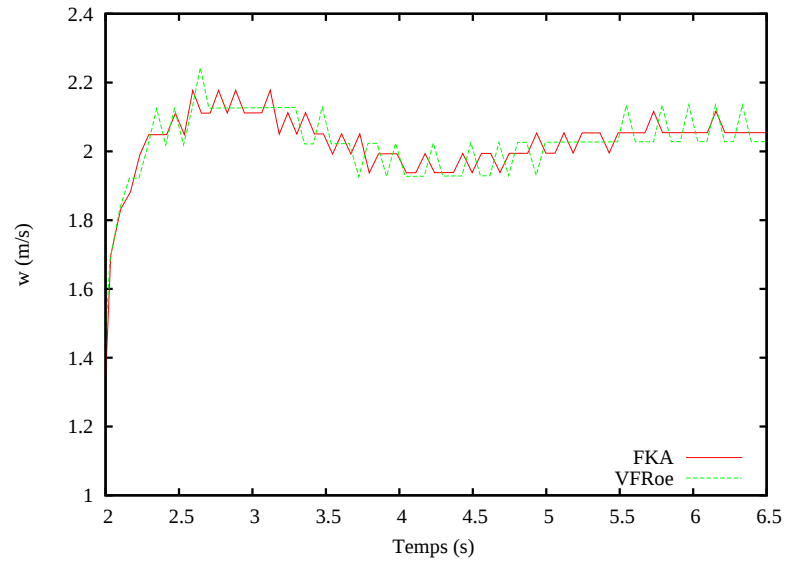
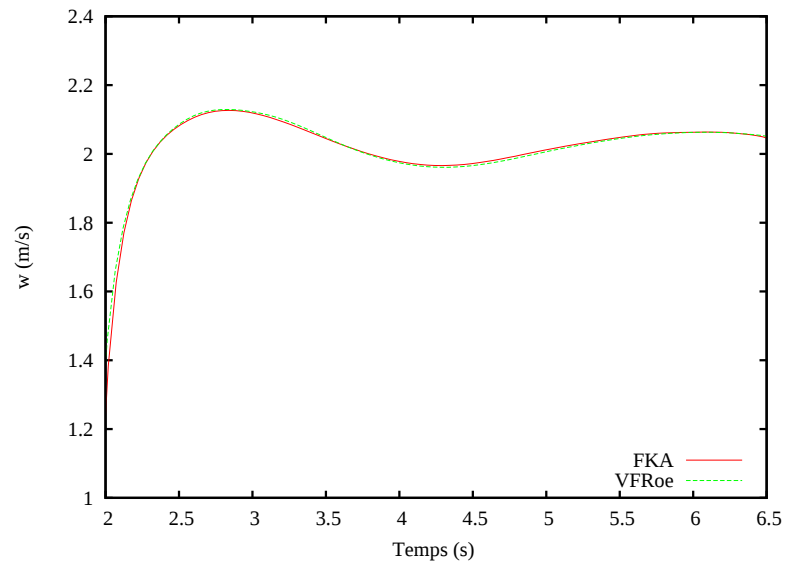
FIGURE 2.44 – Test de Wiggert avec $c = 9$ m/s au point (hB)FIGURE 2.45 – Test de Wiggert avec $c = 9$ m/s au point (hC)

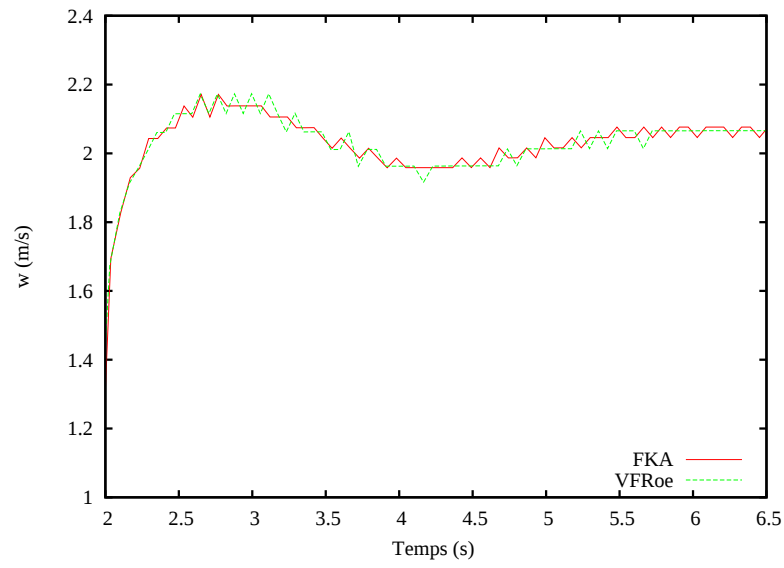
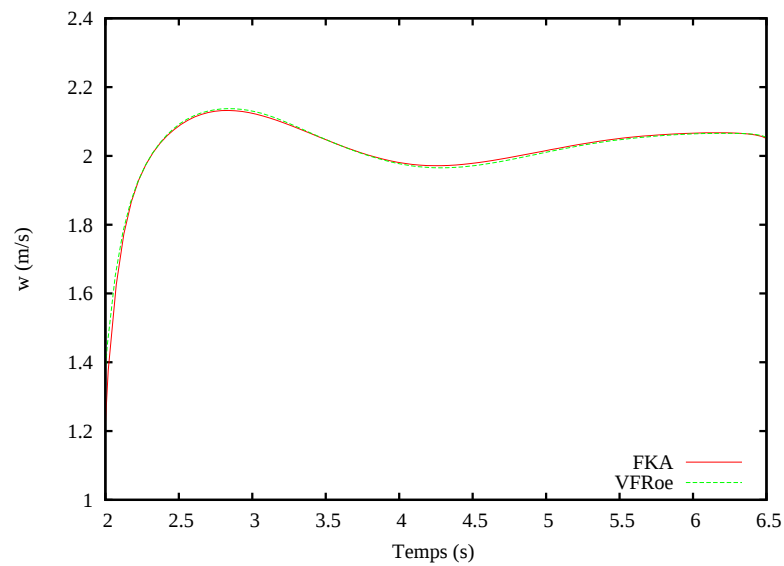
FIGURE 2.46 – Test de Wiggert avec $c = 20$ m/s au point (hB)FIGURE 2.47 – Test de Wiggert avec $c = 20$ m/s au point (hC)

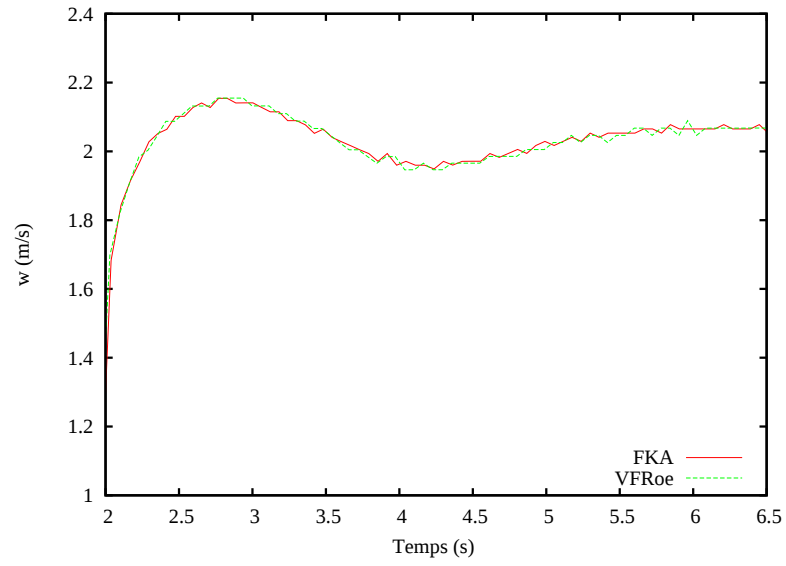
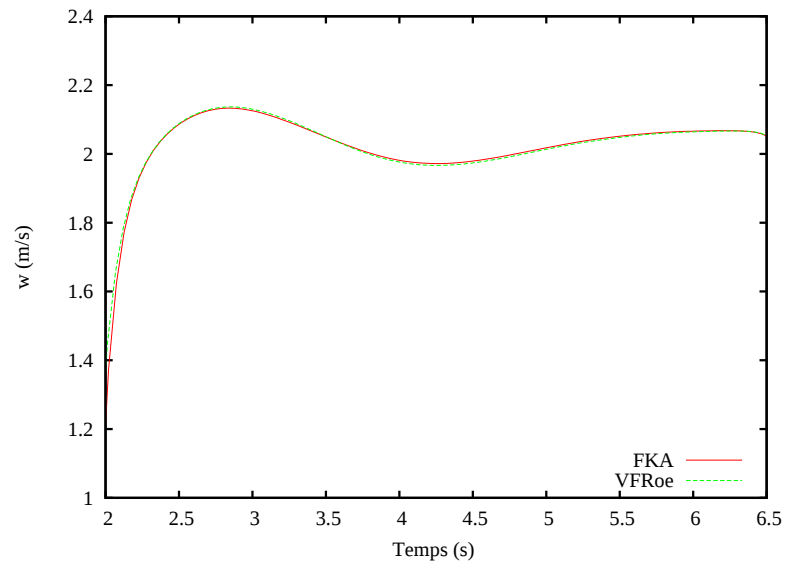
FIGURE 2.48 – Test de Wiggert avec $c = 40$ m/s au point (hB)FIGURE 2.49 – Test de Wiggert avec $c = 40$ m/s au point (hC)

FIGURE 2.50 – Test de Wiggert avec $c = 100$ m/s au point (hB)FIGURE 2.51 – Test de Wiggert avec $c = 100$ m/s au point (hC)

FIGURE 2.52 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition pour $c = 9 \text{ m/s}$ FIGURE 2.53 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition avec interpolation pour $c = 9 \text{ m/s}$

FIGURE 2.54 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition pour $c = 20 \text{ m/s}$ FIGURE 2.55 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition avec interpolation pour $c = 20 \text{ m/s}$

FIGURE 2.56 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition pour $c = 40 \text{ m/s}$ FIGURE 2.57 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition avec interpolation pour $c = 40 \text{ m/s}$

FIGURE 2.58 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition pour $c = 100 \text{ m/s}$ FIGURE 2.59 – Comparaison de la vitesse d'interface de transition avec interpolation pour $c = 100 \text{ m/s}$

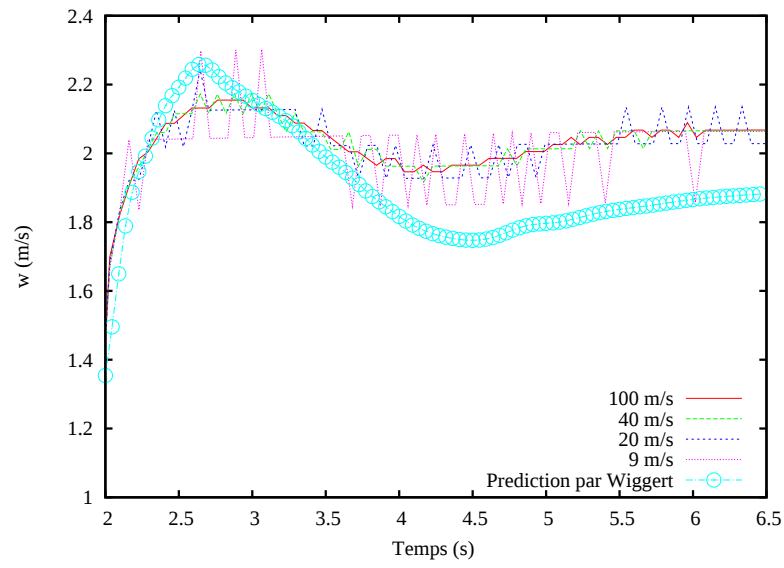


FIGURE 2.60 – Calcul de la vitesse d'interface avec l'approche des « ondes fantômes »

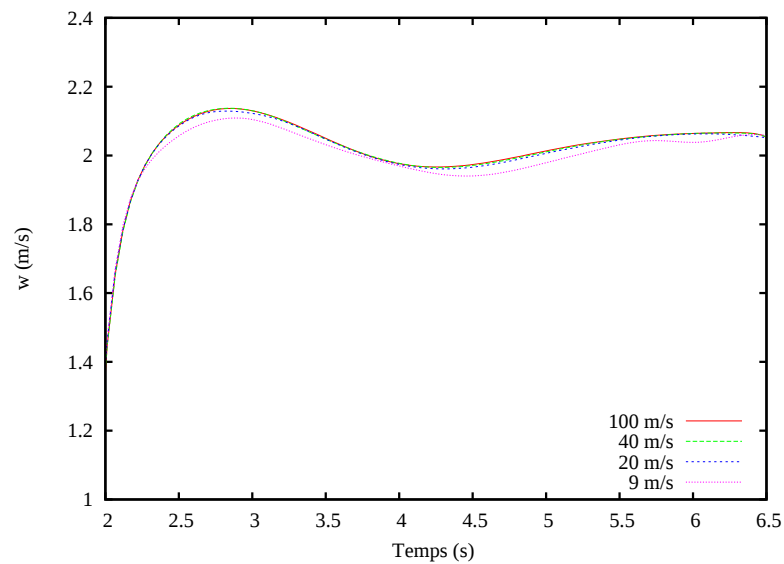


FIGURE 2.61 – Calcul de la vitesse d'interface avec l'approche des « ondes fantômes » avec interpolation

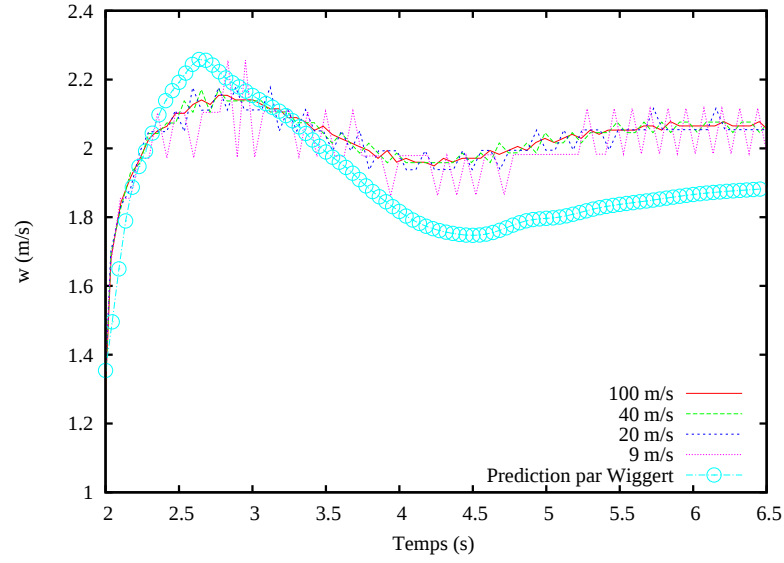


FIGURE 2.62 – Calcul de la vitesse d'interface avec l'approche FKA

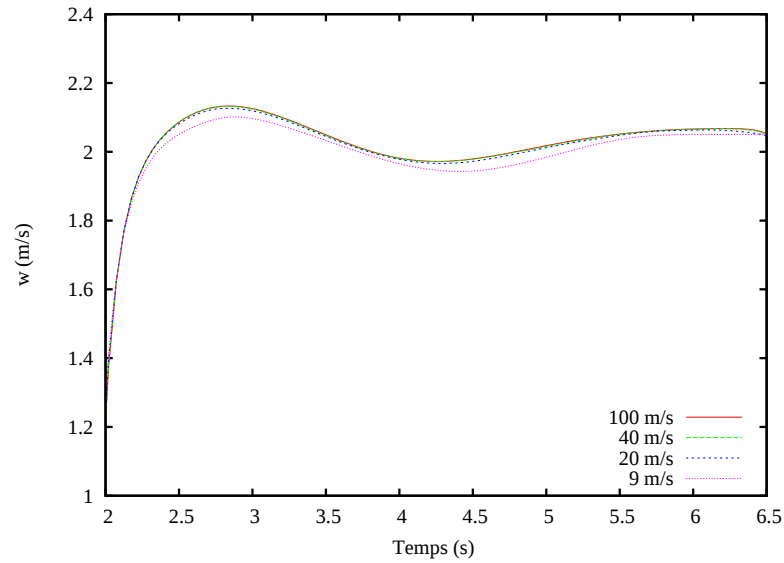


FIGURE 2.63 – Calcul de la vitesse d'interface avec l'approche FKA avec interpolation

2.3.7 Remarques générales concernant l'approximation numérique par le solveur cinétique

On a proposé un schéma Volumes Finis avec un solveur cinétique pour discrétiser les équations **PFS** en décentrant les termes sources aux interfaces en utilisant la notion de barrière de potentiel. D'un point de vue mathématique et dans le formalisme du terme de pseudo-topographie, la friction ne peut être décentrée. Cependant, en procédant à un splitting, i.e. en remplaçant, une fois les calculs effectués, le terme de pente par la pente dynamique, on obtient de très bon

résultats par rapport à une discrétisation centrée. L'élaboration d'une autre approche fait partie des projets à venir, en particulier avec C. Simeoni⁴.

On a également proposé une méthode de suivi d'interface complètement cinétique, qu'on a appelé FKA. C'est une approche équivalente à celle des « ondes fantômes » introduite pour le schéma VFRoe. Cependant, bien que ce traitement soit cinétique, et donc en harmonie avec le reste du schéma, il est coûteux car il nécessite la résolution d'un système non linéaire 5×5 à chaque points de transition. Néanmoins, elle ne nécessite pas l'utilisation des conditions de transition de Song et elle est simplement basée sur une interprétation cinétique.

Enfin, on a montré que l'approche classique pour obtenir un schéma cinétique qui préservent les états stationnaires à vitesse nulle, comme dans [88], n'est valide que pour un écoulement à surface libre en conduite uniforme rectangulaire et à pente constante. Cela est dû à l'espace de définition de la fonction χ . Un autre point de vue pour pallier ce problème est nécessaire. Il fait donc partie des travaux en perspective visant à obtenir ces propriétés pour tout type de termes sources (donc quelque soit la géométrie de la conduite). Parallèlement, on a développé une méthode qui préserve tous les états stationnaires en calculant les flux à partir d'*états à profil stationnaire*. L'idée est la même que celle introduite pour la matrice à profil stationnaire dans le cadre du schéma bien équilibré VFRoe. De plus, c'est une approche très générale car pour tout flux numérique consistant, elle permet de définir un schéma bien équilibré.

Enfin, un des avantages par rapport au schéma VFRoe est le traitement des zones de points critiques $u \approx c$, de fond sec et d'assèchement pour lesquels aucun artefact numérique n'est nécessaire.

4. Department of Pure and Applied Mathematics, University of L'Aquila, ITALY

PARTIE II

Autour des Équations Primitives Compressibles

CHAPITRE 3

Existence et stabilités de solutions faibles

Sommaire

3.1 Introduction	134
3.1.1 Contexte physique.	135
3.1.2 Contexte mathématique.	136
3.2 Dérivation formelle des EPCs	138
3.2.1 Équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes	139
3.2.2 Analyse asymptotique formelle et les EPCs	140
3.3 Un résultat d'existence de solutions faibles pour les EPCs en dimension deux	142
3.3.1 Preuve du résultat d'existence	143
3.3.2 Preuve du résultat d'existence de B. V. Gatapov et A. V. Kazhikhov	145
3.3.2.1 Le modèle intermédiaire	146
3.3.2.2 Estimations <i>a priori</i>	146
3.3.2.3 Borne de ξ et estimations supplémentaires	147
3.3.2.4 Preuve du Théorème d'existence 3.3.2	149
3.4 Un résultat de stabilité de solutions faibles pour les EPCs en dimension trois	150
3.4.1 Étude de la stabilité de solutions faibles du modèle intermédiaire	152
3.4.1.1 Estimations d'énergie et d'entropie	153
3.4.1.2 Preuve du Théorème 3.4.2	155
3.4.2 Étude de la stabilité de solutions faibles pour les EPCs	161
3.5 Perspectives	161

Ce chapitre est un développement des articles en collaboration avec T. Ngom⁵ et M. Sy⁶ :

M. Ersoy and T. Ngom. *Existence of a global weak solution to one model of Compressible Primitive Equations*. Submitted, available at
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00487370/fr/>, 2010.

M. Ersoy, T. Ngom and M. Sy. *Compressible Primitive Equations : formal derivation and stability of weak solutions*. Submitted, available at
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00488398/fr/>, 2010.

5. Laboratoire d'Analyse Numérique et Informatique (LANI), Université Gaston Berger de Saint-Louis, Sénégal
6. LANI

NOTATIONS

- $x = (x_1, x_2)$: variables spatiales horizontales
- y : variable verticale ; l'altitude
- $z = 1 - e^{-y}$: variable verticale après changement de variables
- $\rho(t, x, y)$: densité stratifiée
- $\xi(t, x)$: densité
- $\mathbf{u}(t, x, y) = (u_1, u_2)$: vitesse horizontale
- $v(t, x, y)$: vitesse verticale
- $w(t, x, z) = (1 - z)v(t, x, z)$: vitesse verticale après changement de variables
- $\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$: laplacien par rapport à x
- $\Delta = \Delta_x + \partial_y^2$: laplacien par rapport à (x, y)
- $\text{div}_x = \partial_{x_1} + \partial_{x_2}$: divergence par rapport à x
- $\text{div} = \text{div}_x + \partial_y$: divergence par rapport à (x, y)
- $\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$: gradient par rapport à (x, y)
- $\nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix}$: gradient par rapport à x
- $2D(u) = \nabla u + \nabla^t u$: tenseur du taux de déformation par rapport à (x, y)
- $2D_x(u) = \nabla_x u + \nabla_x^t u$: tenseur du taux de déformation par rapport à x
- $2A(u) = \nabla u - \nabla^t u$: tenseur du taux de vorticité par rapport à (x, y)
- $2A_x(u) = \nabla_x u - \nabla_x^t u$: tenseur du taux de vorticité par rapport à x
- *EPC* : équations primitives compressibles
- *EPCs* : équations primitives compressibles simplifiées

N.B. les mêmes notations sont utilisées en dimension deux d'espace.

3.1 Introduction

On s'intéresse aux équations de type *Équations Primitives Compressibles* (EPC). Ce sont les équations gouvernant les mouvements de la dynamique de l'atmosphère. Elles appartiennent à la classe des équations de la dynamique des fluides géophysiques (c. f. [33]). Suivant [100], dans la hiérarchie des modèles, les EPC se situent entre les équations non-hydrostatiques et les équations de Saint-Venant. En toute généralité, on peut établir la classification suivante, valable aussi bien pour les équations compressibles qu'incompressibles :

Équations de Navier-Stokes 3D

↓

Équations non-hydrostatiques

↓

Équations primitives

↓

Équations de Saint-Venant

↓

Équations quasi-géostrophiques

3.1.1 Contexte physique.

Les équations primitives sont issues de l'*approximation hydrostatique*, dans lequel la conservation de la quantité de mouvement verticale est remplacée par l'équation hydrostatique.

En toute généralité, les EPC sont obtenues à partir des équations complètes de Navier-Stokes compressibles pour la modélisation de l'atmosphère :

$$\rho \frac{D}{Dt} U + \nabla p + \rho \mathbf{g} = D, \quad (3.1)$$

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \operatorname{div} U = 0, \quad (3.2)$$

$$c_p \frac{D}{Dt} \mathcal{T} - \frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} p = Q_{\mathcal{T}}, \quad (3.3)$$

$$\frac{D}{Dt} q = Q_q, \quad (3.4)$$

$$p = \mathcal{R} \mathcal{T} \rho \quad (3.5)$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + U \cdot \nabla.$$

Le champs de vecteur vitesse est noté U et a pour composante horizontale, $\mathbf{u}$, et comme composante verticale v . Les termes ρ , p , $\mathcal{T}$ et $\mathbf{g}$ représentent respectivement la densité, la pression, la température et le vecteur gravité $(0, 0, g)$ où g est la constante universelle de gravitation. Le terme de diffusion D a pour expression :

$$D = \mu \Delta_x U + \nu \partial_y^2 U \quad (3.6)$$

où Δ_x dénote le Laplacien par rapport à la coordonnée horizontale $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et (μ, ν) , $\mu \neq \nu$, représente une paire de viscosité anisotrope, caractéristique même des écoulements dans l'atmosphère. Q_q est un terme de diffusion moléculaire, q est la quantité d'eau dans l'air et $Q_{\mathcal{T}}$ représente la diffusion de la chaleur émanant du soleil (voir, par exemple, [100] pour plus de détails concernant les termes de diffusions). Enfin, c_p et $\mathcal{R}$ sont respectivement la chaleur spécifique à pression constante et la constante spécifique du gaz correspondant à l'air.

Les équations ci-dessus étant complexes à étudier aussi bien mathématiquement que numériquement, on leur préfère la version hydrostatique. Dans [87], une analyse d'échelle montre que les seuls termes prépondérants dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement verticale sont $\partial_y p$ et $g\rho$. Il convient alors, au moins formellement, de remplacer la troisième équation de (3.1) par l'équation hydrostatique. On obtient alors, les *équations primitives compressibles* pour la modélisation de l'atmosphère,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{u} + \nabla_x p = \mu \Delta_x \mathbf{u} + \nu \partial_y^2 \mathbf{u}, \\ \partial_y p = -g\rho, \\ \frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \\ c_p \frac{D}{Dt} \mathcal{T} - \frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} p = Q_{\mathcal{T}}, \\ \frac{D}{Dt} q = Q_q, \\ p = \mathcal{R} \mathcal{T} \rho \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où x et y sont les coordonnées horizontale et verticale avec

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_x + v \partial_y.$$

Dérivation formelle des EPC simplifiées.

Contrairement aux équations primitives ci-dessus, on s'intéresse à une version pour laquelle les termes de diffusion, issus de la quantité d'eau dans l'air ou de la chaleur émise par le soleil, ne sont pas pris en compte. On aboutit alors à des équations qu'on appelle tout simplement *Équations Primitives Compressibles simplifiées* que l'on note EPCs. Elles sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes avec un tenseur de viscosité anisotrope. En effet, tirant parti des différences de dimension horizontale et verticale de l'atmosphère (10 à 20 kilomètres pour l'altitude contre des milliers de kilomètres de longueur), on obtient le modèle hydrostatique suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v \mathbf{u}) + \nabla_x p(\rho) = 2 \operatorname{div}_x (\nu_1 D_x(\mathbf{u})) + \partial_y (\nu_2 \partial_y \mathbf{u}), \\ \partial_y p(\rho) = -g\rho \end{cases} \quad (3.8)$$

auquel on ajoute, ultérieurement, un terme de friction quadratique $r\rho \mathbf{u}|\mathbf{u}|$ utile pour l'étude mathématique de la stabilité de solutions faibles du modèle en dimension 3.

Ce dernier système est formellement proche de (3.7). La seule différence entre les modèles (3.7) et (3.8) est le terme visqueux. À l'instar des équations (3.7), la viscosité du modèle (3.8) dépend de la densité. De plus, si la pression p a pour expression $p = c^2 \rho$ avec $c = \sqrt{\mathcal{R}\mathcal{T}}$, par exemple, alors la densité ρ peut s'écrire sous la forme $\xi(t, x)e^{-g/c^2 y}$ où ξ , encore appelé densité, est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}_x (\xi \mathbf{u}) + \xi \partial_z w = 0, \\ \partial_t (\xi \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\xi \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_z (\xi w \mathbf{u}) + c^2 \nabla_x (\xi) = 2 \operatorname{div}_x (\nu_1 D_x(\mathbf{u})) + \partial_z (\nu_2 \partial_z \mathbf{u}), \\ \partial_z \xi = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

qui est obtenu à partir du modèle (3.8) par un simple changement de variable : $z = 1 - e^{-g/c^2 y}$ et $w = e^{-g/c^2 y} v$. Ce modèle, qu'on appelle *modèle intermédiaire*, est un des éléments clefs de l'analyse mathématique de solutions faibles du système (3.8).

3.1.2 Contexte mathématique.

Les premiers résultats mathématiques concernant les EPC (3.7) ont été établis par J.L. Lions, R. Temam and S. Wang ([78]). Ils ont apporté une formulation mathématique des EPC en dimension deux et trois d'espace. En se basant sur les travaux de J. Leray, ils ont prouvé l'existence de solutions faibles globales en temps (voir aussi [100] à ce sujet). Par exemple, dans [100], ils utilisent la pression p comme coordonnée verticale à la place de l'altitude y . De plus, ils écrivent le système (3.7) en coordonnées sphériques (ϕ, θ, p) pour passer du modèle compressible à un modèle incompressible afin d'utiliser les résultats de J. Leray. Pour ce faire, ils distinguent les variables « *prognostiques* » $(\mathbf{u}, \mathcal{T}, q)$ des variables « *diagnostiques* » (v, ρ, Φ) où Φ dénote le géopotentiel $gy(\phi, \theta, p, t)$. Les variables diagnostiques $(v = v(\mathbf{u}), \rho = \rho(\mathcal{T}), \Phi = \Phi(\mathcal{T}))$ peuvent être écrites comme fonctions des variables prognostiques à l'aide de la loi d'état $p = \mathcal{R}\mathcal{T}\rho$ et de l'équation à divergence nulle, obtenus par intégration de l'équation de conservation de la masse qui s'écrit dans les nouvelles coordonnées :

$$\partial_p \Phi + \frac{\mathcal{R}\mathcal{T}}{p} = 0.$$

Ainsi, avec :

- la formulation faible des équations primitives (3.7) (en définissant les espaces fonctionnels bien choisis)

$$\frac{dU}{dt} + AU + B(U, U) + E(U) = l$$

de condition initiale $U(0) = U_0$ où $U = (\mathbf{u}, \mathcal{T}, q)$ avec A, B, E des fonctionnelles appropriées,

- un schéma aux différences finies en temps sur $U : U^n$,
- des *estimations a priori* sur U^n ,
- une fonction approchée $U_{\Delta t}(t) = U^n$ sur l'intervalle $](n-1)\Delta t, n\Delta t[$ (suivant [99])
- des *estimations a priori* sur $U_{\Delta t}$,
- passage à la limite,

ils prouvent le résultat d'existence.

Si on suppose $\mathcal{T}$ et q constant dans les équations (3.7), alors la différence qu'on a déjà évoquée dans le paragraphe précédent, s'écrit $\mu \Delta_x \mathbf{u} + \nu \partial_y^2 \mathbf{u}$ pour (3.7) et $\operatorname{div}_x (\nu_1 D_x(\mathbf{u})) + \partial_z (\nu_2 \partial_z \mathbf{u})$ pour (3.8). La viscosité du système (3.8) dépend de la densité, comme pour les équations de Saint-Venant étudiées dans, par exemple, dans l'article [23].

À notre connaissance, les EPCs (3.8) ont été introduites pour la première fois par Kochin dans [69]. Un des premiers résultats d'existence à ce sujet est obtenu dans [53] pour le modèle intermédiaire (3.9). En effectuant un changement de variables en coordonnées Lagrangiennes, Gatapov *et al.* prouvent que la densité ξ est majorée et minorée. Ensuite, en écrivant un système d'équations sur la partie oscillante de la vitesse horizontale $\mathbf{u}$, et en utilisant le théorème de point fixe de Schauder, ils obtiennent un résultat d'existence faible globale en temps pour le modèle (3.9) en dimensions deux d'espace. En ce qui nous concerne, en utilisant un changement de variable judicieux, on étend le résultat d'existence de solutions faibles de Gatapov *et al.* [53] au modèle (3.8).

Malheureusement, l'approche utilisée dans [53] pour le modèle (3.9) en dimension trois ne peut être appliquée car le changement de variables en coordonnées Lagrangiennes ne donne plus d'informations sur ξ . À ce jour et à notre connaissance, il n'existe pas de résultat d'existence pour le modèle en dimension trois d'espace. Néanmoins, il est possible d'obtenir un résultat de stabilité de solutions faibles pour le modèle (3.9) que l'on étend assez facilement à (3.8).

En effet, les techniques standard pour montrer la stabilité de solutions ou l'existence de solutions faibles ne s'appliquent pas aux équations (3.8) à cause de l'équation hydrostatique. L'énergie du système associée est :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |u|^2 + \rho \ln \rho - \rho + 1 \, dx dy + \int_{\Omega} 2\nu_1 |D_x(u)|^2 + \nu_2 |\partial_y^2 u| \, dx dy + \int_{\Omega} \rho g v \, dx dy = 0$$

où le signe de l'intégrale

$$\int_{\Omega} \rho g v \, dx dy$$

est inconnu (avec la notation $D_x(u) = \frac{\nabla_x u + \nabla_x^t u}{2}$ pour le tenseur du taux de déformation par rapport aux variables horizontales $x \in \mathbb{R}^2$) car il manque, *a priori*, des informations sur v . En revanche, les équations (3.9) sont reliées par un difféomorphisme au modèle (3.8) sur lequel on obtient facilement des estimations *a priori* grâce à l'équation $\partial_z \xi = 0$.

Néanmoins, ces estimations à elles seules ne suffisent pas à passer à la limite dans les termes non-linéaires, d'où la nécessité de trouver des estimations supplémentaires. À cet effet, il suffit

d'exploiter le fait que la densité ξ est indépendante de la coordonnées verticale z . Qui plus est, la perte d'information sur la vitesse verticale du modèle (3.8) est compensée par l'équation de conservation de la masse qui s'écrit sous la forme :

$$\partial_z^2 w = \frac{1}{\xi} \operatorname{div}_x (\xi \partial_z \mathbf{u}).$$

Tenant compte de ces faits, on obtient des estimations supplémentaires sur la densité ξ grâce à une entropie mathématique, appelée *BD entropie* (initialement introduite par Bresch *et al.* [25]). Une preuve simple est présentée dans les articles [28, 27, 23]). Cependant, il semble nécessaire tout de même de considérer un terme régularisant comme dans le cadre des équations de Saint-Venant (le lecteur est renvoyé à [24, 25, 26], par exemple). On ajoute un terme de trainée, de la forme $R\rho\mathbf{u}|\mathbf{u}|$, au modèle (3.8) (donc à (3.9)) pour pouvoir conclure à la stabilité de solutions faibles (et éventuellement à la construction d'une suite de solutions approchées). En effet, ce terme de friction quadratique combiné au terme de viscosité donne les estimations suffisantes pour passer à la limite dans le terme non-linéaire, $\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, pour lequel une convergence forte de $\sqrt{\rho}u$ est requise.

Dans le calcul de la BD-entropie, il apparait naturellement des termes de bord que l'on fait disparaître via des conditions aux limites périodiques sur le domaine spatial. Toutefois, comme il a été souligné dans [27]), on peut également considérer des conditions aux limites adéquates de type Dirichlet ou Navier.

Enfin, notons l'article récent de Mellet *et al.* [82], où un résultat de stabilité concernant les écoulements barotropes est obtenu pour $\gamma > 1$ et en toute dimension d'espace entre 1 et 3. Ce résultat utilise d'une part la BD-entropie mais aussi un multiplicateur ad hoc pour obtenir un meilleur contrôle sur ρu^2 , au lieu de $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, et pour pouvoir passer à la limite sans ajouter un terme régularisant. Le multiplicateur en question est de la forme $(1 + \ln(1 + |u|^2))u$. Cependant, Bresch *et al.* [26] notent qu'il ne semble pas possible de construire une suite de solutions régulières approchées satisfaisant ces estimations.

Plan du chapitre

Dans la Section 3.2, on dérive formellement les EPCs (3.8) et le modèle intermédiaire (3.9) en dimension trois d'espace, en ajoutant le terme de friction, nécessaire à l'étude mathématique. Ensuite, à la Section 3.3, partant de la version 2-dimensionnelle du modèle (3.8) et en se basant sur les travaux de Gatapov *et al.* [53], on obtient le premier résultat principal de ce chapitre, à savoir un théorème d'existence de solutions faibles globales en temps. De surcroît, on établit un résultat de stabilité de solutions faibles pour le modèle 3 dimensionnel (3.8). C'est l'objet de la Section 3.4.

3.2 Dérivation formelle des EPCs

Dans cette section, on dérive formellement les EPCs qu'on a précédemment introduites. Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes compressibles avec un tenseur de viscosité anisotrope, qui permet de prendre en compte les différences de viscosités qui surviennent au niveau de l'atmosphère.

3.2.1 Équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes

Un fluide compressible pour l'atmosphère, sans la prise en compte de phénomènes complexes (c.f Section 3.1) est gouverné par les équations suivantes :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3.10)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div} \sigma - \rho \mathbf{f} = 0, \quad (3.11)$$

$$p = p(\rho) \quad (3.12)$$

où ρ est la densité et $\mathbf{u} = (u, v)^t$ représente la vitesse du fluide de composante horizontale $u = (u_1, u_2)^t$ et de composante verticale v .

La loi de pression est donnée par l'équation d'état :

$$p(\rho) = c^2 \rho \quad (3.13)$$

où c est une constante donnée. Les forces extérieures sont données par $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = -R\sqrt{u_1^2 + u_2^2}(u_1, u_2, 0)^t - g\mathbf{k}$$

où R est le coefficient de traînée (supposé constant), g est la constante universelle de gravité et $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^t$ (où X^t représente la transposée du tenseur X). Le fluide est supposé Newtonien de telle sorte qu'il existe des coefficients de viscosités μ_i , $i = 1, 2, 3$ et λ tels que le tenseur des contraintes totales de partie visqueuse anisotrope Σ non constant :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

a pour expression :

$$\sigma = -pI_3 + 2\Sigma.D(u) + \lambda \operatorname{div}(u) I_3,$$

où I_3 représente la matrice identité, $\lambda \operatorname{div}(u)$ le tenseur des contraintes normales de viscosité λ , $D(u)$ le tenseur de taux de déformation usuel, à savoir $D(u) = \frac{\nabla u + \nabla^t u}{2}$ et $\Sigma.D(u)$ le tenseur de taux de déformation anisotrope :

$$\begin{pmatrix} 2\mu_1 \partial_{x_1} u_1 & \mu_1(\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2) & \mu_2(\partial_y u_1 + \partial_{x_1} v) \\ \mu_1(\partial_{x_1} u_2 + \partial_{x_2} u_1) & 2\mu_1 \partial_{x_2} u_2 & \mu_2(\partial_y u_2 + \partial_{x_2} v) \\ \mu_3(\partial_{x_1} v + \partial_y u_1) & \mu_3(\partial_{x_2} v + \partial_y u_2) & 2\mu_3 \partial_y v \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Remarque 3.2.1. L'utilisation d'un tel tenseur anisotrope dans ce contexte permet de prendre en compte l'anisotropie dans l'atmosphère et d'autre part de justifier l'approximation hydrostatique.

En séparant la contribution horizontale de la contribution verticale, le système de Navier-Stokes (3.10)–(3.14) s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u}) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_y(\rho \mathbf{u} v) - 2\operatorname{div}(\mu_1 D_x(\mathbf{u})) - \partial_y(\mu_2 \partial_y \mathbf{u}) \\ \quad - \partial_y(\mu_2 \nabla_x v) - \nabla_x(\lambda \operatorname{div}_x \mathbf{u}) - \nabla_x(\lambda \partial_y v) + \nabla_x p + R\rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}_x(\rho \mathbf{u} v) + \partial_y(\rho v^2) - \operatorname{div}_x(\mu_3 \nabla_x v) - \operatorname{div}_x(\mu_3 \partial_y \mathbf{u}) - \\ \quad 2\partial_y(\mu_3 \partial_y v) - \partial_y(\lambda \operatorname{div}_x \mathbf{u}) - \partial_y(\lambda \partial_y v) + \partial_y p = -\rho g, \\ p = p. \end{cases} \quad (3.15)$$

où $D_x(\mathbf{u})$ représente le tenseur de taux de déformation par rapport aux variables horizontales $x = (x_1, x_2)$:

$$D_x(\mathbf{u}) = \frac{\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^t \mathbf{u}}{2} \quad \text{où} \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix}.$$

On note Ω , le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; x \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^2, 0 < y < h\} \quad (3.16)$$

où $\Omega_x = \mathbb{T}^2$ désigne un tore correspondant au domaine spatial horizontal. Le système (3.15) est complété par les conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} &\text{conditions périodiques sur } \partial\Omega_x, \\ &v|_{y=0} = v|_{y=h} = 0, \\ &\partial_y \mathbf{u}|_{y=0} = \partial_y \mathbf{u}|_{y=h} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

et par les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x, y) &= \mathbf{u}_0(x, y), \\ \rho(0, x, y) &= \xi_0(x) e^{-g/c^2 y}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Remarque 3.2.2. La structure particulière imposée à la densité ρ (3.18) sera explicitée à la Section 3.2.2.

On suppose que ξ_0 est une fonction positive bornée :

$$0 \leq \xi_0(x) \leq M < +\infty. \quad (3.19)$$

et strictement positive dans le cas 2-dimensionnel.

3.2.2 Analyse asymptotique formelle et les EPCs

Tirant profit des dimensions caractéristiques de l'atmosphère, on procède à une analyse asymptotique en couche mince (de la même manière que pour la dérivation des équations **PFS**, c.f. Chapitre 1) : on suppose que le rapport d'aspect est « grand ». En d'autres termes, l'échelle caractéristique de l'altitude, noté H , est très petite par rapport à la longueur caractéristique L . On admet également que les variations des mouvements verticaux sont négligeables par rapport aux mouvements horizontaux.

Soit alors ε , un « petit » paramètre, donné par :

$$\varepsilon = \frac{H}{L} = \frac{V}{U}$$

où V (resp. U) une longueur caractéristique relative à la composante verticale (resp. aux composantes horizontale) de la vitesse. On introduit le temps caractéristique T de tel sorte que $T = \frac{L}{U}$ et une pression unité $P = \bar{\rho} U^2$ où $\bar{\rho}$ désigne une densité caractéristique.

On note les quantités sans dimensions de temps, d'espace, de vitesse, de pression, de densité et de viscosité par :

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{T}, & \tilde{x} &= \frac{x}{L}, & \tilde{y} &= \frac{y}{H}, & \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{u}}{U}, & \tilde{v} &= \frac{v}{V}, \\ \tilde{p} &= \frac{p}{\bar{\rho} U^2}, & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\bar{\rho}}, & \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}, & \tilde{\mu}_j &= \frac{\mu_j}{\bar{\mu}_j}, & j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Avec ces notations, le nombre de Froude F_r , le nombre de Reynolds associé à la viscosité μ_i , Re_i ($i = 1, 2, 3$), le nombre de Reynolds associé à la viscosité λ , Re_λ , et le nombre de Mach M_a s'écrivent respectivement :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad Re_i = \frac{\bar{\rho}UL}{\mu_i}, \quad Re_\lambda = \frac{\bar{\rho}UL}{\bar{\lambda}}, \quad M_a = \frac{U}{c}. \quad (3.20)$$

En procédant à ce changement d'échelle, le système (3.15) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} \partial_t \tilde{\rho} + \frac{U}{L} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{V}{H} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\rho} \tilde{v}) = 0, \\ \frac{\bar{\rho}U}{T} \partial_t (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\bar{\rho}U^2}{L} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\bar{\rho}UV}{H} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\rho} \tilde{v} \tilde{\mathbf{u}}) + R\bar{\rho}U^2 \tilde{\rho} |\tilde{\mathbf{u}}| \tilde{\mathbf{u}} + \\ \frac{c^2 \bar{\rho}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho} = 2 \frac{\bar{\mu}_1 U}{L^2} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\mu_1 D_{\tilde{x}}(\tilde{\mathbf{u}})) + \frac{\bar{\mu}_2 U}{H^2} \partial_{\tilde{y}} (\mu_2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\bar{\mu}_2 V}{LH} \partial_{\tilde{y}} (\mu_2 \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}) \\ \quad + \frac{\bar{\lambda}U}{L^2} \nabla_{\tilde{x}} (\tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\mathbf{u}})) + \frac{\bar{\lambda}V}{LH} \nabla_{\tilde{x}} (\tilde{\lambda} \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}), \\ \frac{\bar{\rho}V}{T} \partial_t (\tilde{\rho} \tilde{v}) + \frac{\bar{\rho}UV}{L} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{v}) + \frac{\bar{\rho}V^2}{H} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\rho} \tilde{v}^2) + \frac{c^2 \bar{\rho}}{H} \partial_{\tilde{y}} \tilde{\rho} = -g \bar{\rho} \tilde{\rho} \\ \quad + \frac{\bar{\mu}_3 U}{LH} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\mu_3 \partial_{\tilde{y}} \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\bar{\mu}_3 V}{L^2} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\mu_3 \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}) + 2 \frac{\bar{\mu}_3 V}{H^2} \partial_{\tilde{y}} (\mu_3 \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}) \\ \quad + \frac{\bar{\lambda}U}{LH} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\mathbf{u}})) + \frac{\bar{\lambda}V}{H^2} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\lambda} \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Gardant à l'esprit la définition des nombres sans dimension (3.20), en omettant le *tilde* et en multipliant l'équation de conservation de la masse (3.21) par T , les équations de la conservation de la quantité de mouvement sur $\mathbf{u}$ (3.21) par $\frac{T}{\bar{\rho}U}$, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sur v (3.21) par $\frac{T}{\bar{\rho}V}$, on obtient le système adimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v \mathbf{u}) + \frac{1}{M_a^2} \nabla_x \rho + r \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \frac{2}{Re_1} \operatorname{div}_x (\mu_1 D_x(\mathbf{u})) \\ \quad + \frac{1}{Re_2} \partial_y \left(\mu_2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y \mathbf{u} + \nabla_x v \right) \right) + \frac{1}{Re_\lambda} \nabla_x (\lambda \operatorname{div}_x (\mathbf{u}) + \lambda \partial_y v), \\ \partial_t (\rho v) + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u} v) + \partial_y (\rho v^2) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{M_a^2} \partial_y \rho = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{F_r^2} \rho \\ \quad + \frac{1}{Re_3} \operatorname{div}_x \left(\mu_3 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y \mathbf{u} + \nabla_x v \right) \right) + \frac{2}{\varepsilon^2 Re_3} \partial_y (\mu_3 \partial_y v) \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon^2 Re_\lambda} \partial_y (\lambda \operatorname{div}_x (\mathbf{u}) + \lambda \partial_y v). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

dans lequel on a posé $r = RL$ pour le coefficient de friction.

D'autre part, si on suppose le régime asymptotique suivant :

$$\frac{\mu_1}{Re_1} = \nu_1, \quad \frac{\mu_i}{Re_i} = \varepsilon^2 \nu_i, \quad i = 2, 3 \text{ and } \frac{\lambda}{Re_\lambda} = \varepsilon^2 \gamma, \quad (3.23)$$

où ν_i , $i = 1, 2, 3$ et γ sont des viscosités variables, et que l'on néglige les termes d'ordre ε , le système (3.22) est réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v \mathbf{u}) + \frac{1}{M_a^2} \nabla_x \rho + r \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} = \\ \quad 2 \operatorname{div}_x (\nu_1 D_x(\mathbf{u})) + \partial_y (\nu_2 \partial_y \mathbf{u}), \\ \partial_y \rho = -\frac{M_a^2}{F_r^2} \rho, \end{array} \right. \quad (3.24)$$

posé sur le domaine $\Omega = \{(x, y); x \in \Omega_x, 0 < y < 1\}$ et $t \in [0, T]$, $T > 0$ où $\Omega_x = [0, 1]$ pour le modèle en dimension 2 et c'est un tore bidimensionnel pour le modèle en dimension 3. On les appelle *équations primitives compressibles simplifiées*, noté EPCs.

En simplifiant par $M_a = F_r$, une solution de l'équation hydrostatique du système (3.24) est de la forme :

$$\rho(t, x, y) = \xi(t, x) e^{-y} \quad (3.25)$$

où $\xi = \xi(t, x)$ une fonction qu'on appelle encore « densité ». La structure stratifiée de ρ permet de justifier *a posteriori* le choix de la condition initiale (3.18). D'autre part, cette structure nous renseigne sur ρ . En effet, dès lors que ξ est connu, pour chaque altitude y , le profil de ρ est donné par ξ . Cette remarque suggère donc de chercher les équations satisfaites par ξ .

Dans les Sections 3.3 et 3.4, on montre un résultat d'existence de solutions faibles en dimension 2 d'espace, sans le terme de friction, et un résultat de stabilité de solutions faibles en dimension 3 d'espace pour le modèle ci-dessus.

3.3 Un résultat d'existence de solutions faibles pour les EPCs en dimension deux

Dans cette partie, on établit un résultat d'existence pour le modèle (3.24) en dimension 2 d'espace *sans le terme de friction*. Les équations régissant le fluide compressible sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \partial_x (\rho \mathbf{u}) + \partial_y (\rho v) & = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \partial_x (\rho \mathbf{u}^2) + \partial_y (\rho \mathbf{u} v) + \partial_x \rho & = \partial_x (\nu_1 \partial_x \mathbf{u}) + \partial_y (\nu_2 \partial_y \mathbf{u}), \\ \partial_y \rho & = -\rho \end{array} \right. \quad (3.26)$$

où x, y désigne les variables d'espace horizontale et verticale. $(\mathbf{u}, v)$ est le champ de vitesse du fluide de composante horizontale (resp. composante verticale) $\mathbf{u}$ (resp. v) et p la pression donnée par (3.13).

On suppose que la viscosité horizontale ν_1 est donnée par :

$$\nu_1(t, x, y) = \nu_0 e^{-y} \quad (3.27)$$

où ν_0 est une constante positive, et que ν_2 est une fonction suffisamment régulière. Cependant, par souci de simplicité, on considère ν_2 sous la forme :

$$\nu_2 = \nu_0 e^y.$$

On supposera également $\nu_0 = 1$ dans la suite de cette section. On adjoint au système, posé sur

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{x=0} &= \mathbf{u}|_{x=1} = 0, \\ v|_{y=0} &= v|_{y=1} = 0, \\ \partial_y \mathbf{u}|_{y=0} &= \partial_y \mathbf{u}|_{y=1} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

et les données initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0(x, y), \\ \rho|_{t=0} &= \xi_0(x) e^{-y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

où ξ_0 est supposé borné :

$$0 < m \leq \xi_0 \leq M < \infty.$$

Dans le reste de cette section, on dit que :

Définition 3.3.1. *Une solution faible du système (3.26)-(3.28) est un triplet de fonctions $(\rho, \mathbf{u}, v)$, tel que $\rho \geq 0$,*

$$\rho \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \quad \partial_t \rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.31)$$

satisfaisant (3.26) au sens des distributions. En particulier, l'identité intégrale suivante est vérifiée pour toute fonction $\phi|_{t=T} = 0$ régulière à support compact :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{u} \partial_t \phi + \rho \mathbf{u}^2 \partial_x \phi + \rho \mathbf{u} v \partial_z \phi + \rho \partial_x \phi + \rho v \phi \, dx dy dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \nu_1 \partial_x \mathbf{u} \partial_x \phi + \nu_2 \partial_y \mathbf{u} \partial_y \phi \, dx dy dt + \int_\Omega \mathbf{u}_0 \rho_0 \phi|_{t=0} \, dx dy. \end{aligned} \quad (3.32)$$

On a le résultat principal suivant :

Théorème 3.3.1. *On suppose que les données initiales $(\xi_0, \mathbf{u}_0)$ ont les propriétés suivantes*

$$(\xi_0, \mathbf{u}_0) \in W^{1,2}(\Omega), \quad \mathbf{u}_0|_{x=0} = \mathbf{u}_0|_{x=1} = 0.$$

Alors, il existe une solution faible au sens de la Définition 3.3.1 où $\rho(t, x, y)$ est une fonction bornée et strictement positive.

3.3.1 Preuve du résultat d'existence

La structure stratifiée de la densité ρ (3.25), suggère le changement de variable suivant :

$$z = 1 - e^{-y}. \quad (3.33)$$

Ceci permet alors de considérer le modèle initial (3.26) en un modèle plus simple d'inconnues

$$(\xi(t, x), \mathbf{u}(t, x, z), w(t, x, z))$$

où w définit le profil vertical de la vitesse dans les nouvelles coordonnées. En particulier, w a pour expression :

$$w(t, x, z) = e^{-y} v(t, x, y). \quad (3.34)$$

En multipliant les deux premières équations de (3.26) par e^y et en utilisant le changement de variables (3.33) et (3.34), on obtient le modèle, dit *modèle intermédiaire*, suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \partial_x(\xi \mathbf{u}) + \partial_z(\xi w) &= 0, \\ \partial_t(\xi \mathbf{u}) + \partial_x(\xi \mathbf{u}^2) + \partial_z(\xi \mathbf{u} w) + \partial_x \xi &= \partial_x(\partial_x \mathbf{u}) + \partial_z(\partial_z \mathbf{u}), \\ \partial_z \xi &= 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

posé sur le domaine

$$\Omega_h = \{(x, z); 0 < x < 1, 0 < z < h \text{ avec } h = 1 - e^{-1}\}$$

écrit en variable (x, z) .

Le modèle (3.35) est exactement celui étudié par Gatapov *et al.* [53]. Ils l'ont obtenu à partir des équations (3.26) en négligeant certains termes à l'instar de la dérivation présentée. En outre, ils définissent les solutions faibles comme suit :

Définition 3.3.2. Une solution faible de (3.35) satisfaisant les conditions aux limites,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{x=0} &= \mathbf{u}|_{x=1} = 0, \\ w|_{z=0} &= w|_{z=h} = 0, \\ \partial_z \mathbf{u}|_{z=0} &= \partial_z \mathbf{u}|_{z=h} = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

est un triplet $(\xi, \mathbf{u}, w)$ de fonctions tel que $\xi \geq 0$,

$$\xi \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)), \quad \partial_t \xi \in L^2(0, T; L^2(0, 1)), \quad (3.37)$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega_h)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_h)), \quad w \in L^2(0, T; L^2(\Omega_h)) \quad (3.38)$$

vérifie le modèle (3.35) au sens des distributions. En particulier, l'égalité suivante est vérifiée pour toute fonction $\phi|_{t=T} = 0$ régulière à support compact

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \mathbf{u} \partial_t \phi + \xi \mathbf{u}^2 \partial_x \phi + \xi \mathbf{u} w \partial_z \phi + \xi \partial_x \phi \, dx dz dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega_h} \mathbf{u} \Delta \phi \, dx dz dt + \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \xi_0 \phi|_{t=0} \, dx dz. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ils ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.3.2 (B. Gatapov et A.V. Kazhikhov [53]). On suppose que les données initiales $(\xi_0, \mathbf{u}_0)$ ont les propriétés suivantes

$$(\xi_0, \mathbf{u}_0) \in W^{1,2}(\Omega_h), \quad \mathbf{u}_0|_{x=0} = \mathbf{u}_0|_{x=1} = 0.$$

Alors il existe une solution faible au sens de la Définition 3.3.2 où $\xi(t, x)$ est une fonction bornée et strictement positive.

Donc, en supposant que la donnée initiale $(\xi_0, \mathbf{u}_0)$ a la régularité suivante :

$$(\xi_0, \mathbf{u}_0) \in W^{1,2}(\Omega_h), \quad \mathbf{u}_0|_{x=0} = \mathbf{u}_0|_{x=1} = 0,$$

le théorème précédent donne l'existence d'un triplet $(\xi, \mathbf{u}, w)$ de fonctions, tel que

$$\xi \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(0, 1)), \quad \partial_t \xi \in L^2(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega_h)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega_h)), \quad w \in L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$$

satisfaisant (3.35) au sens des distributions.

Par suite, en utilisant le changement de variable inverse $y = -\ln(1 - z)$ dans les estimations précédentes, on obtient :

- $\|\rho\|_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\xi\|_{L^2(0,1)}$,
- $\|\partial_x \rho\|_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\partial_x \xi\|_{L^2(0,1)}$,
- $\|\partial_t \rho\|_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\partial_t \xi\|_{L^2(0,1)}$
- $\|\partial_y \rho\|_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\xi\|_{L^2(0,1)}$

où la constante α est donnée par

$$\alpha = \int_0^{1-e^{-1}} (1-z) dz < +\infty.$$

On en déduit

$$\|\rho\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \alpha \|\xi\|_{W^{1,2}(0,1)}.$$

De plus, on a les estimations suivantes sur la densité

$$\rho \in L^\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega))$$

et

$$\partial_t \rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Les estimations sur $\mathbf{u}$ sont encore vraies et il suffit de remplacer Ω_h par Ω dans l'estimation ci-dessus. En appliquant le changement de variable sur w , en posant $v(t, x, y) = e^y w(t, x, y)$ on obtient alors :

$$v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

En effet

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Omega)} &= \int_0^1 \int_0^1 |v(t, x, y)|^2 dy dx = \int_0^1 \int_0^1 |e^y w(t, x, y)|^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-e^{-1}} \left(\frac{1}{1-z} \right)^3 |w(t, x, z)|^2 dz dx \\ &< e^3 \|w\|_{L^2(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du Théorème 3.3.1. ■

3.3.2 Preuve du résultat d'existence de B. V. Gatapov et A. V. Kazhikhov

Pour la beauté mathématique du Théorème 3.3.2 dû à Gatapov *et al.* [53], on rappelle la démonstration de ce dernier. Les équations (3.35) ont été obtenues par ces auteurs en négligeant un terme et les moyennes qu'ils utilisent sont à poids, $e^{-y} dy$, contrairement à la méthode avec changement de variables proposé dans la section précédente.

Les étapes de la démonstration sont :

- dérivation formelle du modèle (3.35),
- écriture du modèle (3.35) verticalement moyenné,
- estimations *a priori* du modèle (3.35),
- bornes sur la densité ξ (par un changement de variables en coordonnée Lagrangiennes) et estimations supplémentaires,
- point fixe de Schauder.

Sans perte de généralités, on supposera, ici, que Ω est le carré unité et $0 < t < T$.

3.3.2.1 Le modèle intermédiaire

En intégrant les équations (3.26) pour $0 < y < 1$, compte tenu des conditions aux limites (3.29), ils obtiennent :

$$\partial_t \xi + \partial_x (\xi \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (3.40)$$

$$\partial_t (\xi \mathbf{u}) + \partial_x (\xi \bar{\mathbf{u}}^2 + \xi (\bar{\mathbf{u}}^2 - \bar{\mathbf{u}}^2)) + \partial_x \xi = \partial_x^2 \left(\bar{\mathbf{u}} + \int_0^1 w \, dy \right) \quad (3.41)$$

où

$$\bar{\mathbf{u}}(t, x) = \int_0^1 \mathbf{u}(t, x, y) e^{-y} dy$$

et

$$w = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}.$$

En négligeant le terme w , il vient alors le système :

$$\partial_t \xi + \partial_x (\xi \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (3.42)$$

$$\partial_t (\xi \mathbf{u}) + \partial_x \left(\xi \bar{\mathbf{u}}^2 + \xi \int_0^1 (\bar{\mathbf{u}}^2 - \bar{\mathbf{u}}^2) \, dz \right) + \partial_x \xi = \partial_x^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (3.43)$$

formellement proche des équations de Navier-Stokes moyennées. Ils sont donc amenés à considérer le modèle (3.35) à la place du modèle (3.26) posé sur le carré unité Ω .

3.3.2.2 Estimations *a priori*

De manière classique, en multipliant les équations de la conservation de la quantité de mouvement de (3.35) par $\mathbf{u}$, on obtient l'équation d'énergie :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \left(\xi \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \xi \ln(\xi) - \xi + 1 \right) dx dz + \int_0^1 \int_0^1 (\partial_x \mathbf{u}^2 + \partial_z \mathbf{u}^2) dx dz = 0. \quad (3.44)$$

De cette égalité, on en déduit les estimations *a priori* suivantes :

$$\sup_{0 < t < T} \int_0^1 \xi \ln(\xi) - \xi + 1 \, dx \leq C \text{ et } \sup_{0 < t < T} \int_0^1 \xi(t, x) \left(\int_0^1 \mathbf{u}^2(t, x, z) \, dz \right) dx \leq C$$

où C est une constante positive dépendant des conditions initiales et du domaine Ω (de manière générale, dans la suite, on notera toujours C une telle constante).

En outre, puisque $\bar{u}^2 \geq \bar{\mathbf{u}}^2$, on a immédiatement :

$$\sup_{0 < t < T} \int_0^1 \xi(t, x) \bar{\mathbf{u}}^2 \, dx \leq C.$$

De manière équivalente, en posant $\tau = t$ et $\partial_x \eta = \xi$ (le changement de variable en coordonnées Lagrangiennes que l'on introduit à la Section suivante 3.3.2.3), l'estimation précédente s'écrit aussi :

$$\sup_{0 < \tau < T} \int_0^1 (\bar{\mathbf{u}}(\tau, \eta))^2 \, d\eta \leq C. \quad (3.45)$$

De manière identique, on obtient :

$$\int_0^T \int_0^1 \int_0^1 (\partial_x \mathbf{u}^2 + \partial_z \mathbf{u}^2) dx dz dt \leq C \text{ et } \int_0^T \int_0^1 \xi (\partial_\eta \bar{\mathbf{u}})^2 \, d\eta d\tau \leq C.$$

3.3.2.3 Borne de ξ et estimations supplémentaires

On introduit les coordonnées Lagrangiennes :

$$\eta(t, x) = \int_0^x \xi(t, s) ds, \quad \tau = t. \quad (3.46)$$

Les équations (3.42)-(3.43) en variables (τ, η) sont alors :

$$\begin{cases} \partial_\tau \left(\frac{1}{\xi} \right) = \partial_\eta \bar{\mathbf{u}}, \\ \partial_\tau \bar{\mathbf{u}} + \partial_\eta p = \partial_\eta (\xi \partial_\eta \bar{\mathbf{u}}) \end{cases} \quad (3.47)$$

où $p := \xi(1 + p_0)$ avec $p_0(\tau, \eta) = \bar{\mathbf{u}}^2 - \bar{\mathbf{u}}^2 \geq 0$.

En partant de la première équation du système (3.47), on écrit :

$$\xi \partial_\eta \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\xi} \partial_\tau \xi = -\partial_\tau \ln(\xi).$$

En injectant l'expression de $\xi \partial_\eta \bar{\mathbf{u}}$ dans la deuxième équation, on a :

$$\partial_\tau \bar{\mathbf{u}} + \partial_\eta p = -\partial_\tau \partial_\eta \ln(\xi)$$

que l'on intègre entre 0 et $\tau < T$:

$$\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_0 + \partial_\eta \int_0^\tau p ds = -\partial_\eta \ln(\xi)|_\tau + \partial_\eta \ln(\xi)|_{\tau=0}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\xi_{\tau=0} = 1$. Par conséquent,

$$\bar{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}} = \partial_\eta \left(\ln(\xi) + \int_0^\tau p ds \right). \quad (3.48)$$

Puisque par (3.45), $\bar{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T, L^2(0, 1))$, et de ce qui précède, on en déduit :

$$\sup_{0 < \tau < T} \left\| \partial_\eta \left(\ln(\xi) + \int_0^\tau p ds \right) \right\|_{L^2(0,1)} \leq C. \quad (3.49)$$

D'autre part, en intégrant directement la première équation du système (3.47) entre $0 < \eta < 1$:

$$\int_0^1 \partial_\tau \left(\frac{1}{\xi} \right) d\eta = \bar{\mathbf{u}}|_{\eta=1} - \bar{\mathbf{u}}|_{\eta=0} = 0, \text{ i.e. } \partial_\tau \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi} \right) d\eta = 0,$$

on tire l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\xi(\tau, \eta)} \right) d\eta = \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi_0(\eta)} \right) d\eta = 1.$$

Par continuité de la fonction ξ , on a :

$$\forall \tau, \exists \eta_0 = \eta_0(\tau); \quad \xi(\tau, \eta_0(\tau)) = 1.$$

Ainsi, en intégrant l'équation (3.48) entre $\eta_0(\tau)$ et η , pour η quelconque, on obtient :

$$\log \xi + \int_0^\tau p ds = \int_0^\tau p(s, \eta_0(s)) ds + \int_{\eta_0}^\eta \bar{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}} d\xi.$$

En prenant l'exponentielle, l'égalité précédente s'écrit :

$$\xi(\tau, \eta) \exp \left(\int_0^\tau p(s, \eta) ds \right) = Y(\tau) B(\tau, \eta), \quad (3.50)$$

où

$$Y(\tau) = \exp \left(\int_0^\tau p(s, \eta_0(\tau)) ds \right) \text{ et } B(\tau, \eta) = \exp \left(\int_{\eta_0}^\eta \overline{\mathbf{u}}_0 - \overline{\mathbf{u}} d\xi \right).$$

La fonction B est bornée grâce à l'estimation sur $\overline{\mathbf{u}}$ (3.45). Il reste donc à montrer que Y l'est également. À cet effet, on a d'une part :

$$\sup_{0 \leq \eta \leq 1} p_0(t, x) = \int_0^x \partial_x p_0 dx \leq \int_0^1 |\partial_x p_0| dx$$

et d'autre part, en écrivant que :

$$\partial_x \overline{\mathbf{u}}^2 = 2 \int_0^1 \mathbf{u} \partial_x \mathbf{u} dz \text{ et } \partial_x \overline{\mathbf{u}}^2 = 2 \overline{\mathbf{u}} \partial_x \overline{\mathbf{u}},$$

puis en les combinant, on trouve :

$$\sup_{0 \leq \eta \leq 1} p_0(t, x) \leq 2 \int_0^1 \left| \int_0^1 \mathbf{u} \partial_x \mathbf{u} dz \right| dx + 2 \int_0^1 |\overline{\mathbf{u}} \partial_x \overline{\mathbf{u}}| dx.$$

Le premier terme à droite de l'inégalité est contrôlé en appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwartz et Poincaré. Quant au deuxième terme, il découle de l'inégalité géométrique et de l'estimation sur $\overline{\mathbf{u}}$ et en particulier du fait que :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \partial_x \mathbf{u} dz \right)^2 dx = \int_0^1 (\partial_x \overline{\mathbf{u}})^2 dx = \int_0^1 \xi(\partial_\eta \overline{\mathbf{u}})^2 d\eta < +\infty.$$

En d'autres termes, on a

$$\sup_{0 \leq \eta \leq 1} p_0(t, x) < +\infty.$$

Dès lors, il découle :

$$\int_0^1 \sup_{0 \leq \eta \leq 1} p_0(\tau, \eta) d\tau \leq C. \quad (3.51)$$

De plus, en multipliant l'équation (3.48) par $(1 + p_0(\tau, \eta))$, puis en intégrant par rapport à τ , il vient :

$$\exp \left(\int_0^\tau p(s, \eta) ds \right) = 1 + \int_0^\tau (1 + p_0(s, \eta)) Y(s) B(s, \eta) ds.$$

Par conséquent, (3.48) prend la forme suivante :

$$\xi \left(1 + \int_0^\tau (1 + p_0(s, \eta)) Y(s) B(s, \eta) ds \right) = Y(\tau) B(\tau, \eta). \quad (3.52)$$

En prenant $\eta = \eta_0(\tau)$, i.e. $\xi(\tau, \eta_0(\tau)) = 1$, on en déduit $Y(\tau) \geq B^{-1}(\tau, \eta_0(\tau)) \geq C > 0$. La borne supérieure est obtenue en appliquant le lemme de Gronwall à l'équation (3.52) et en utilisant (3.51). On a donc Y borné. Ainsi, via l'équation (3.50), on en déduit que ξ est bornée.

De plus, par l'équation (3.49), on a :

$$\|\partial_\eta \ln(\xi)\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,1))} < +\infty$$

et $1/\xi$ étant borné, on obtient :

$$\|\partial_\eta \xi\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,1))} \leq C. \quad (3.53)$$

D'autre part, par les équations du système (3.47) : il vient respectivement,

$$\|\partial_\tau \xi\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,1))} \leq 0 \text{ et } \int_0^T \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L^2(0,1)}^2 dt \leq C.$$

Par l'équation de continuité (3.35), on a aussi :

$$\|\partial_z w\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Toutes les estimations obtenues sont suffisantes pour appliquer le théorème de point fixe de Schauder en utilisant la formulation moyenne-oscillation.

3.3.2.4 Preuve du Théorème d'existence 3.3.2

On cherche une solution du système (3.35)-(3.36) sous la forme

$$\mathbf{u}(t, x, z) = \bar{\mathbf{u}}(t, x) + \tilde{\mathbf{u}}(t, x, z). \quad (3.54)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est la partie oscillante du champs de vitesse horizontale qui satisfait la condition

$$\forall(t, x), \int_0^1 \tilde{\mathbf{u}}(t, x, z) dz = 0.$$

On injecte l'expression (3.54) dans les équations (3.42)-(3.43), on aboutit à :

$$\partial_t \xi + \partial_x(\xi \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (3.55)$$

$$\partial_t(\xi \bar{\mathbf{u}}) + \partial_x \left(\xi \bar{\mathbf{u}}^2 + \xi \int_0^1 \tilde{\mathbf{u}}^2 dz \right) + \partial_x \xi = \partial_x^2 \bar{\mathbf{u}}. \quad (3.56)$$

De même, en utilisant les équations précédentes dans (3.35), pour lequel $\mathbf{u}$ a été écrit comme dans (3.54), on obtient le modèle à divergence nulle suivant :

$$\partial_x(\xi \tilde{\mathbf{u}}) + \xi \partial_z(w) = 0, \quad (3.57)$$

$$\partial_t(\xi \tilde{\mathbf{u}}) + \partial_x(\xi(2\tilde{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^2)) - \partial_x \left(\xi \int_0^1 \tilde{\mathbf{u}}^2 dz \right) + \partial_z(\xi w \mathbf{u}) = \partial_x^2 \tilde{\mathbf{u}} + \partial_z^2 \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.58)$$

$$\partial_z \xi = 0. \quad (3.59)$$

Pour terminer la preuve, Gatapov *et al.* [53] appliquent le théorème de point fixe de Schauder (rappelé en Annexe C) sur l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} A : K &\rightarrow K, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 &\mapsto A(\tilde{\mathbf{u}}_1) = \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{aligned}$$

où K est déterminé par les estimations préliminaires sur $\bar{\mathbf{u}}$ (donc sur $\tilde{\mathbf{u}}$ compte tenu de la relation (3.54)). Plus précisément, d'après l'estimation (3.45), ils définissent l'ensemble K par :

$$K = \left\{ \tilde{\mathbf{u}}; \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \leq k < +\infty \right\}.$$

L'opérateur A est défini par la composée de deux opérateurs A_i , $i = 1, 2$ donnés comme suit :

- Pour tout $\tilde{\mathbf{u}} \in K$, $A_0(\tilde{\mathbf{u}}) = (\xi, \bar{\mathbf{u}}) \in K \times K$ est une solution du système d'équations :

$$\begin{aligned} \partial_t \xi + \partial_x(\xi \bar{\mathbf{u}}) &= 0, \\ \partial_t(\xi \bar{\mathbf{u}}) + \partial_x \left(\xi \bar{\mathbf{u}}^2 + \xi \int_0^1 \tilde{\mathbf{u}}^2 dz \right) + \partial_x \xi &= \partial_x^2 \bar{\mathbf{u}}, \\ \partial_z \xi &= 0. \end{aligned}$$

- Pour tout $(\xi, \bar{\mathbf{u}}) \in K \times K$, $A_1(\xi, \bar{\mathbf{u}}) = \tilde{\mathbf{u}}$ est une solution de l'équation parabolique :

$$\partial_t(\xi \tilde{\mathbf{u}}) + \partial_x(\xi(2\tilde{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^2)) - \partial_x \left(\xi \int_0^1 \tilde{\mathbf{u}}^2 dz \right) + \partial_z(\xi w \mathbf{u}) = \partial_x^2 \tilde{\mathbf{u}} + \partial_z^2 \tilde{\mathbf{u}}$$

avec

$$w = -\frac{1}{\xi} \int_0^z \tilde{\mathbf{u}}(t, x, Z) dZ$$

obtenue à partir de l'équation à divergence nulle (3.57).

Remarque 3.3.1. Les opérateurs A_i , $i = 1, 2$ sont bien définis.

En effet, étant donnée $\tilde{\mathbf{u}}$, l'existence d'un couple $(\xi, \bar{\mathbf{u}})$ découle du résultat d'Antontsev et al. [3]. Par ailleurs, ξ étant borné et par définition de $\bar{\mathbf{u}}$, on a $(\xi, \bar{\mathbf{u}}) \in K^2$, donc A_0 est bien défini.

L'équation (3.58) étant parabolique, elle admet une solution $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega)) \cap K$. Ce qui permet donc de définir l'opérateur A_1 .

Les hypothèses de Schauder sont alors vérifiées dans l'espace $K \subset\subset E = L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ($\subset\subset$ désignant l'injection compacte) en utilisant des critères de compacité tel que :

$$W^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^s(\Omega), \forall 1 \leq s \leq +\infty$$

et compacité faible dans un Banach réflexif. ■

3.4 Un résultat de stabilité de solutions faibles pour les EPCs en dimension trois

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité de solutions faibles du modèle (3.24) en dimension 3 d'espace posé sur

$$\Omega = \{(x, y); x \in \Omega_x, 0 < y < 1\}$$

où Ω_x est un tore bidimensionnel. On choisit le profil des viscosités comme suit :

$$\begin{aligned} \nu_1(t, x, y) &= \nu \rho(t, x, y) e^{-y}, \\ \nu_2(t, x, y) &= \nu \rho(t, x, y) e^{2y}, \end{aligned}$$

où ν est une constante positive. On impose les conditions aux limites suivantes : $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} &\text{conditions périodiques sur } \partial\Omega_x, \\ v|_{y=0} &= v|_{y=1} = 0, \\ \partial_y \mathbf{u}|_{y=0} &= \partial_y \mathbf{u}|_{y=1} = 0. \end{aligned} \tag{3.60}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x, y) &= \mathbf{u}_0(x, y), \\ \rho(0, x, y) &= \xi_0(x) e^{-y}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Contrairement au modèle en dimension 2 considéré dans la section précédente, le terme de friction est utile pour obtenir le résultat de cette section.

On définit alors une solution faible du système (3.24) par :

Définition 3.4.1. On dit que $(\rho, \mathbf{u}, v)$ est une solution faible du système (3.24) sur $[0, T] \times \Omega$, avec les conditions aux limites (3.60) et les conditions initiales (3.61) si

$$\begin{aligned} \rho &\in L^\infty(0, T; L^3(\Omega)), & \sqrt{\rho} &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \\ \sqrt{\rho} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2), & \sqrt{\rho} v &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \sqrt{\rho} D_x(\mathbf{u}) &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^{2 \times 2}), & \sqrt{\rho} \partial_y v &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \nabla \sqrt{\rho} &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3), & \rho &\geq 0, \end{aligned}$$

et $(\rho, \sqrt{\rho} \mathbf{u}, \sqrt{\rho} v)$ satisfait

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\sqrt{\rho} \sqrt{\rho} \mathbf{u}) + \partial_y(\sqrt{\rho} \sqrt{\rho} v) = 0, \\ \rho(0, x, y) = \rho_0(x, y) \end{cases} \quad (3.62)$$

au sens des distributions et si l'égalité suivante est vérifiée pour toute fonction φ régulière à support compact telle que $\varphi(T, x, y) = 0$ et $\varphi_0 = \varphi_{t=0}$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega \rho \mathbf{u} \partial_t \varphi \, dx dy dt + \int_0^T \int_\Omega (2\nu \rho D_x(\mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla_x \varphi \, dx dy dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \rho v \partial_y \varphi \, dx dy dt - \int_0^T \int_\Omega \nu \mathbf{u} \partial_y (\rho e^{2y} \partial_y \varphi) \, dx dy dt + \int_0^T \int_\Omega r \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} \varphi \, dx dy dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \rho \operatorname{div}(\varphi) \, dx dz dt + \int_0^T \int_\Omega \rho v \varphi \, dx dz dt = \int_\Omega \rho_0 \mathbf{u}_0 \varphi_0 \, dx dy. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Le résultat principal de cette partie est décrit dans le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. Soit $(\rho_n, \mathbf{u}_n, v_n)$ une suite de solutions faibles du système (3.24), avec les conditions aux limites (3.60) et les conditions initiales (3.61), vérifiant les égalités d'entropie (3.73) et (3.88) telle que :

$$\rho_n \geq 0, \quad \rho_n^n \rightarrow \rho_0 \text{ dans } L^1(\Omega), \quad \rho_n^n \mathbf{u}_n^n \rightarrow \rho_0 \mathbf{u}_0 \text{ dans } L^1(\Omega). \quad (3.64)$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite,

- ρ_n converge fortement dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^{3/2}(\Omega))$,
- $\sqrt{\rho_n} \mathbf{u}_n$ converge fortement dans $L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega))^2)$,
- $\rho_n v_n$ converge fortement dans $L^1(0, T; (L^1(\Omega))^2)$ pour tout $T > 0$,
- $(\rho_n, \sqrt{\rho_n} \mathbf{u}_n, \sqrt{\rho_n} v_n)$ converge vers une solution faible du système (3.62),
- $(\rho_n, \mathbf{u}_n, v_n)$ satisfait les inégalités d'énergie et d'entropie (3.73) et (3.88) et converge vers une solution faible du système (3.24)-(3.17).

Suivant l'idée principale de la section précédente, on dérive un modèle intermédiaire pour prouver ce résultat. On utilise donc le changement de variable suivant :

$$x = x, \quad t = t, \quad z = 1 - e^{-y} \quad (3.65)$$

et on pose :

$$w(t, x, z) = e^{-y} v(t, x, y). \quad (3.66)$$

On aboutit (en procédant de la même manière que dans la section précédente) au modèle intermédiaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}_x(\xi \mathbf{u}) + \partial_z(\xi w) = 0, \\ \partial_t(\xi \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\xi \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \partial_z(\xi \mathbf{u} w) + \nabla_x \xi + r \xi |\mathbf{u}| \mathbf{u} = 2\nu \operatorname{div}_x(\xi D_x(\mathbf{u})) + \nu \partial_z^2(\xi \mathbf{u}), \\ \partial_z \xi = 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

Dans les nouvelles variables, les conditions aux limites (3.17) et les conditions initiales (3.18) s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \text{conditions périodiques sur } \Omega_x, \\ & w|_{z=0} = w|_{z=h} = 0, \\ & \partial_z \mathbf{u}|_{z=0} = \partial_z \mathbf{u}|_{z=h} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, x, z) &= \mathbf{u}_0(x, z), \\ \xi(0, x) &= \xi_0(x) \end{aligned} \quad (3.69)$$

où $\Omega_h = \Omega_x \times [0, h]$ avec $h = 1 - e^{-1}$ et $\Omega_x = \mathbb{T}^2$. Ce modèle, par la présence de l'équation $\partial_z \xi = 0$, est beaucoup plus simple à étudier (comme souligné précédemment dans l'introduction de ce chapitre). Ainsi, une fois le résultat établi pour le modèle intermédiaire, le Théorème principal 3.4.1 est immédiat par le changement de variable inverse $y = -\ln(1 - z)$.

3.4.1 Étude de la stabilité de solutions faibles du modèle intermédiaire

On définit une solution faible des équations (3.67) par :

Définition 3.4.2. *on dit que $(\xi, \mathbf{u}, w)$ est une solution faible du système (3.67) sur $[0, T] \times \Omega_h$, avec les conditions aux limites (3.68) et les conditions initiales (3.69), si*

$$\begin{aligned} \xi &\in L^\infty(0, T; L^3(\Omega_h)), & \sqrt{\xi} &\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_h)), \\ \sqrt{\xi} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; L^2(\Omega_h)), & \sqrt{\xi} w &\in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_h))^2) \\ \sqrt{\xi} D_x(\mathbf{u}) &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^{2 \times 2}), & \sqrt{\xi} \partial_z w &\in L^2(0, T; L^2(\Omega_h)), \\ \nabla_x \sqrt{\xi} &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^2), & \xi &\geq 0, \end{aligned}$$

et $(\xi, \sqrt{\xi} \mathbf{u}, \sqrt{\xi} w)$ satisfait

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \operatorname{div}_x(\sqrt{\xi} \sqrt{\xi} \mathbf{u}) + \partial_z(\sqrt{\xi} \sqrt{\xi} w) = 0, \\ \xi(0, x) = \xi_0(x) \end{cases} \quad (3.70)$$

au sens des distributions et si les égalités suivantes sont vérifiées pour toute fonction φ régulière à support compact telle que $\varphi(T, x, z) = 0$ et $\varphi_0 = \varphi_{t=0}$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \mathbf{u} \partial_t \varphi \, dx dz dt + \int_0^T \int_{\Omega_h} (2\nu \xi D_x(\mathbf{u}) - \xi \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla_x \varphi \, dx dz dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi w \partial_z \varphi \, dx dz dt - \int_0^T \int_{\Omega_h} \nu \xi \mathbf{u} \partial_z^2 \varphi \, dx dz dt + \int_0^T \int_{\Omega_h} r \xi |\mathbf{u}| w \varphi \, dx dz dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \operatorname{div}_x(\varphi) \, dx dz dt = \int_{\Omega_h} \xi_0 \mathbf{u}_0 \varphi_0 \, dx dz. \end{aligned} \quad (3.71)$$

On obtient le résultat de stabilité suivant :

Théorème 3.4.2. *Soit $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ une suite de solutions faibles du système (3.67) avec les conditions au bord (3.68) et les conditions initiales (3.69), satisfaisant les inégalités d'énergie et d'entropie (3.73) et (3.88), telles que :*

$$\xi_n \geq 0, \quad \xi_0^n \rightarrow \xi_0 \text{ dans } L^1(\Omega_h), \quad \xi_0^n \mathbf{u}_0^n \rightarrow \xi_0 \mathbf{u}_0 \text{ dans } L^1(\Omega_h). \quad (3.72)$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite,

- ξ_n converge fortement dans $C^0(0, T; L^{3/2}(\Omega_h))$,

- $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ converge fortement dans $L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega_h))^2)$,
- $\xi_n u_n$ converge fortement dans $L^1(0, T; (L^1(\Omega_h))^2)$ pour tout $T > 0$,
- $(\xi_n, \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n, \sqrt{\xi_n} w_n)$ converge faiblement vers une solution du système (3.70),
- $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ satisfait les égalités d'énergie et d'entropie (3.73) et (3.88) et converge vers une solution faible du système (3.67)-(3.68).

On divise la preuve du Théorème 3.4.2 en deux étapes.

1. Dans la première, on établit les estimations *a priori* pour le triplet $(\xi, \mathbf{u}, w)$ (c.f. Section 3.4.1.1),
2. puis, supposant l'existence d'une suite de solutions faibles $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$, on obtient les convergences $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ (dans les espaces fonctionnels appropriées) nécessaires pour pouvoir passer à la limite dans tous les termes du système (3.67) (c.f. Section 3.4.1.2).

3.4.1.1 Estimations d'énergie et d'entropie

Les premières estimations *a priori* sont obtenues par l'inégalité d'énergie physique qu'on établit de façon classique. On multiplie l'équation de conservation de la quantité de mouvement par le champ de vitesse et on intègre par parties en utilisant les conditions aux limites :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} \left(\xi \frac{\mathbf{u}^2}{2} + (\xi \ln \xi - \xi + 1) \right) dx dz + \int_{\Omega_h} \nu \xi \left(2 |D_x(\mathbf{u})|^2 + |\partial_z \mathbf{u}|^2 \right) dx dz + \int_{\Omega_h} r \xi |\mathbf{u}|^3 dx dz = 0. \quad (3.73)$$

En exploitant cette égalité, on obtient les estimations suivantes

$$\sqrt{\xi} \mathbf{u} \text{ borné dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_h))^2), \quad (3.74)$$

$$\xi^{1/3} \mathbf{u} \text{ borné dans } L^3(0, T; (L^3(\Omega_h))^2), \quad (3.75)$$

$$\sqrt{\xi} \partial_z \mathbf{u} \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^2), \quad (3.76)$$

$$\sqrt{\xi} D_x(\mathbf{u}) \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^{2 \times 2}), \quad (3.77)$$

$$\xi \ln \xi - \xi + 1 \text{ borné dans } L^\infty(0, T; L^1(\Omega_h)). \quad (3.78)$$

Comme l'ont souligné plusieurs auteurs (c. f. [25, 82]), la difficulté dans la preuve de la stabilité de solutions faibles dans ce type de modèle consiste à passer à la limite dans le terme non linéaire $\xi \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ qui requiert une convergence forte de $\sqrt{\xi} \mathbf{u}$. Il semble nécessaire d'acquérir des informations supplémentaires sur la densité ξ . Dans cette perspective, on utilise une entropie mathématique, appelé BD-entropie [24] qu'on adapte au cas présent.

En prenant le gradient de la première équation de (3.67) par rapport à x , on écrit :

$$\partial_t \nabla_x \xi + \nabla_x (\xi \operatorname{div}_x(\mathbf{u})) + \nabla_x (\mathbf{u} \cdot \nabla_x \xi) + \partial_z \nabla_x (\xi v) = 0.$$

En multipliant cette équation par 2ν et en écrivant les termes $\nabla_x \xi$ sous la forme $\xi \nabla_x \ln \xi$, on aboutit à

$$\partial_t (2\nu \xi \nabla_x \ln \xi) + \operatorname{div}_x (2\nu \xi \nabla_x \ln \xi \otimes \mathbf{u}) + \partial_z (2\nu \xi \nabla_x \ln \xi w) + \operatorname{div}_x (2\nu \xi \nabla_x^t \mathbf{u}) + \partial_z (2\nu \xi \nabla_x w) = 0. \quad (3.79)$$

Ensuite, on somme l'équation (3.79) avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.67) pour obtenir

$$\partial_t (\xi \psi) + \operatorname{div}_x (\psi \otimes \xi \mathbf{u}) + \partial_z (\xi w \psi) + \partial_z (2\nu \xi \nabla_x w) + \nabla_x \xi = 2\nu \operatorname{div}_x (\xi A_x(\mathbf{u})) - r \xi |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \nu \xi \partial_z (\partial_z \mathbf{u}) \quad (3.80)$$

où $\psi = \mathbf{u} + 2\nu \nabla_x \ln \xi$ et $2A_x(\mathbf{u}) = \nabla_x \mathbf{u} - \nabla_x^t \mathbf{u}$ est le tenseur de taux de vorticité. Enfin, l'entropie mathématique est obtenue en multipliant l'équation ci-dessus par ψ et en intégrant par parties sur Ω_h :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \partial_t(\xi \psi) \psi \, dx dz + \int_{\Omega_h} \operatorname{div}_x(\xi \psi \otimes \mathbf{u}) \psi \, dx dz + \int_{\Omega_h} \partial_z(\xi w \mathbf{u}) \psi \, dx dz + 2\nu \int_{\Omega_h} \partial_z \nabla_x(\xi v) \psi \, dx dz \\ & - 2\nu \int_{\Omega_h} \operatorname{div}_x(\xi A_x(\mathbf{u})) \psi \, dx dz - \nu \int_{\Omega_h} \partial_z(\xi \partial_z \mathbf{u}) \psi \, dx dz + r \int_{\Omega_h} \xi |\mathbf{u}| \mathbf{u} \psi \, dx dz + \int_{\Omega_h} \nabla_x \xi \psi \, dx dz = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

En regroupant les trois premiers termes de cette égalité, on a

$$\int_{\Omega_h} \left(\partial_t(\xi \psi) + \operatorname{div}_x(\psi \otimes \xi \mathbf{u}) + \partial_z(\xi w \psi) \right) \psi \, dx dz = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} \xi \frac{|\psi|^2}{2} \, dx dz. \quad (3.82)$$

Comme

$$\int_{\Omega_{h,x}} 2\nu \operatorname{div}_x(\xi A_x(\mathbf{u})) \nabla_x \ln \xi \, dx = 0$$

et grâce aux conditions périodiques sur $\Omega_{h,x}$, on a :

$$\int_{\Omega_h} 2\nu \operatorname{div}_x(\xi A_x(\mathbf{u})) \mathbf{u} \, dx dz = 2\nu \int_{\Omega_h} \xi |A_x(\mathbf{u})|^2 \, dx dz. \quad (3.83)$$

En dérivant l'équation de la masse du modèle intermédiaire par rapport à z , on obtient

$$\partial_z \operatorname{div}_x(\xi \mathbf{u}) = -\xi \partial_z^2 w.$$

En utilisant alors cette égalité et le fait que $\partial_z \xi = 0$, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \partial_z(2\nu \xi \nabla_x w) \psi \, dx dz &= \int_{\Omega_h} \partial_z(2\nu \xi \nabla_x w) \mathbf{u} \, dx dz \\ &= \int_{\Omega_h} w \partial_z \operatorname{div}_x(\xi \mathbf{u}) \, dx dz \\ &= \int_{\Omega_h} \xi |\partial_z w|^2 \, dx dz. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Le traitement des autres termes de (3.81) est immédiat :

$$\int_{\Omega_h} r \xi |\mathbf{u}| \mathbf{u} \psi \, dx dz = \int_{\Omega_h} r |\mathbf{u}|^3 \, dx dz + \int_{\Omega_h} 2\nu r |\mathbf{u}| \nabla_x \xi \, dx dz, \quad (3.85)$$

$$\int_{\Omega_h} \nu \partial_z(\partial_z \mathbf{u}) \psi \, dx dz = \int_{\Omega_h} \nu \xi |\partial_z \mathbf{u}|^2 \, dx dz. \quad (3.86)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla_x \xi \psi \, dx dz &= \int_{\Omega_h} \nabla_x \xi \mathbf{u} \, dx dz + 2\nu \int_{\Omega_h} \nabla_x \xi \nabla_x \ln \xi \, dx dz \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} (\xi \ln \xi - \xi + 1) \, dx dz + 8\nu \int_{\Omega_h} \left| \nabla_x \sqrt{\xi} \right|^2 \, dx dz. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Finalement, en rassemblant les résultats (3.82)–(3.87), l'équation (3.81) permet d'obtenir, l'égalité d'entropie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} \left(\xi \frac{|\psi|^2}{2} + \xi \ln \xi - \xi + 1 \right) dx dz + \int_{\Omega_h} \left(2\nu \xi |\partial_z w|^2 + 2\nu \xi |A_x(\mathbf{u})|^2 + \nu \xi |\partial_z \mathbf{u}|^2 \right) dx dz \\ + \int_{\Omega_h} \left(r \xi |\mathbf{u}|^3 + 2\nu r |\mathbf{u}| \mathbf{u} \nabla \xi + 8\nu \left| \nabla_x \sqrt{\xi} \right|^2 \right) dx dz = 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

De ce qui précède, on en déduit les estimations suivantes :

$$\nabla \sqrt{\xi} \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^3), \quad (3.89)$$

$$\sqrt{\xi} \partial_z w \text{ borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_h)), \quad (3.90)$$

$$\sqrt{\xi} A_x(\mathbf{u}) \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^{2 \times 2}). \quad (3.91)$$

$$\nabla \sqrt{\xi} \text{ borné dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_h))^3), \quad (3.92)$$

De plus, en combinant les estimations (3.77), (3.76), (3.90) et (3.91), il vient

$$\sqrt{\xi} \nabla_x \mathbf{u}, \quad \sqrt{\xi} \nabla_x^t \mathbf{u} \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^{2 \times 2}), \quad (3.93)$$

en particulier,

$$\sqrt{\xi} \operatorname{div}_x(\mathbf{u}) \text{ borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_h)), \quad (3.94)$$

Remarque 3.4.1. L'estimation (3.92) est une conséquence directe des estimations

$$\sqrt{\xi} \psi \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_h))^2)$$

et

$$\sqrt{\xi} \mathbf{u} \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_h))^2)$$

car

$$\sqrt{\xi} \psi = \sqrt{\xi} \mathbf{u} + \nabla_x \sqrt{\xi}.$$

Ces estimations sont suffisantes pour établir le Théorème 3.4.2.

3.4.1.2 Preuve du Théorème 3.4.2

Cette partie est la seconde étape de la preuve. On suppose qu'il existe une suite $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ de solutions du système (3.67) au sens de la Définition 3.4.2. On montre d'abord la convergence de la suite $\sqrt{\xi_n}$. Puis, on cherche les bornes des suites $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ et $\sqrt{\xi_n} w_n$ dans les espaces fonctionnels appropriés, dans le but de montrer que la suite $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ converge fortement et $\xi_n \mathbf{u}_n$ faiblement.

Convergence de $\sqrt{\xi_n}$

Pour commencer, on a le lemme suivant :

Lemme 3.4.1. Si $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ est solution du système (3.67), alors

$$\sqrt{\xi_n} \text{ est borné dans } L^\infty(0, T, H^1(\Omega_h)),$$

$$\partial_t \sqrt{\xi_n} \text{ est borné dans } L^2(0, T, H^{-1}(\Omega_h)).$$

Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, la suite ξ_n converge presque partout et fortement dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$. De plus, ξ_n converge vers ξ dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^{3/2}(\Omega_h))$.

Preuve de Lemme 3.4.1 :

L'équation de la conservation de la masse fournit :

$$\|\sqrt{\xi_n}(t)\|_{L^2(\Omega_h)}^2 = \|\xi_0^n\|_{L^1(\Omega_h)}.$$

De l'estimation ci-dessus et (3.92), on a

$$\sqrt{\xi_n} \text{ borné dans } L^\infty(0, T, H^1(\Omega_h)).$$

En utilisant de nouveau l'équation de la conservation de la masse, on écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t(\sqrt{\xi_n}) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\xi_n}\operatorname{div}_x(\mathbf{u}_n) - \mathbf{u}_n \cdot \nabla_x \sqrt{\xi_n} - \sqrt{\xi_n}\partial_z w_n \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\xi_n}\operatorname{div}_x(\mathbf{u}_n) - \operatorname{div}_x(\mathbf{u}_n \sqrt{\xi_n}) - \sqrt{\xi_n}\partial_z w_n. \end{aligned}$$

Donc, d'après les estimations (3.94), (3.74), et (3.90), on en déduit :

$$\partial_t \sqrt{\xi_n} \text{ borné dans } L^2(0, T, H^{-1}(\Omega_h)).$$

De surcroît, en utilisant le Lemme d'Aubin (c.f. Annexe C-Théorème C.0.3), il vient

$$\sqrt{\xi_n} \text{ converge fortement dans } \sqrt{\xi} \text{ dans } C^0(0, T, L^2(\Omega_h)). \quad (3.95)$$

En utilisant les injections de Sobolev (c.f. Annexe C), on a aussi

$$\sqrt{\xi_n} \text{ borné dans } L^\infty(0, T, L^p(\Omega_h)) \text{ pour tout } p \in [1, 6].$$

En particulier, pour $p = 6$, on en tire ξ_n borné dans $L^\infty(0, T, L^3(\Omega_h))$ et déduisons que

$$\xi_n \mathbf{u}_n = \sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \text{ est borné dans } L^\infty(0, T, (L^{3/2}(\Omega_h))^2). \quad (3.96)$$

Combiné à l'estimation (3.90), il en découle

$$\partial_t \xi_n \text{ borné dans } L^\infty(0, T, W^{-1,3/2}(\Omega_h))$$

puisque

$$\partial_t \xi_n = -\operatorname{div}(\xi_n \mathbf{u}_n) - \xi_n \partial_z w_n.$$

Enfin, en écrivant que :

$$\nabla_x \xi_n = 2\sqrt{\xi_n} \nabla_x \sqrt{\xi_n} \in L^\infty(0, T; (L^{3/2}(\Omega_h))^2),$$

il vient :

$$\xi_n \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; W^{1,3/2}(\Omega_h)).$$

De nouveau, le Lemme d'Aubin (c.f. Annexe C-Théorème C.0.3) permet d'obtenir la compacité de la suite ξ_n dans l'espace $C^0(0, T; L^{3/2}(\Omega_h))$. D'où

$$\xi_n \text{ converge vers } \xi \text{ dans } C^0(0, T; L^{3/2}(\Omega_h)).$$

■

Bornes de $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ et $\sqrt{\xi_n} w_n$

Pour pouvoir passer à la limite dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, il est nécessaire de contrôler les termes $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ et $\sqrt{\xi_n} w_n$. À cet effet, on a le lemme suivant

Lemme 3.4.2. *Si $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ est solution du système (3.67), alors*

$$\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \text{ borné dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_h))^2)$$

et

$$\sqrt{\xi_n} w_n \text{ bornée dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_h)).$$

Preuve du Lemme 3.4.2 :

Comme $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ est solution du système (3.67), de l'estimation (3.74), on a

$$\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \text{ borné dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega_h))^2).$$

Il reste maintenant à contrôler la suite $\sqrt{\xi_n} w_n$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$.

Puisque $\xi_n = \xi_n(t, x)$ et que l'estimation (3.90) est satisfaite, en appliquant l'inégalité de Poincaré, on écrit :

$$\int_0^h \left| \sqrt{\xi_n} w_n \right|^2 dz \leq c \int_0^h \left| \partial_z (\sqrt{\xi_n} w_n) \right|^2 dz.$$

Ainsi, en intégrant sur Ω_c , on obtient

$$\int_{\Omega_h} \xi_n |w_n|^2 dx dz \leq c \int_{\Omega_h} \xi_n |\partial_z w_n|^2 dx dz.$$

D'où

$$\sqrt{\xi_n} w_n \text{ borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_h)).$$

■

Convergence de $\xi_n \mathbf{u}_n$

Les bornes de $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ et $\sqrt{\xi_n} w_n$ sont maintenant connues via le Lemme 3.4.2. On peut donc démontrer la convergence de $\xi_n \mathbf{u}_n$.

Lemme 3.4.3. *Soit $m_n = \xi_n \mathbf{u}_n$ une suite satisfaisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.67). Alors, on a*

$$\xi_n \mathbf{u}_n \rightarrow m \quad \text{dans } L^2(0, T; (L^p(\Omega_h))^2) \text{ fortement, } \forall 1 \leq p < 3/2$$

et

$$\xi_n \mathbf{u}_n \rightarrow m \quad \text{pour presque tout } (t, x, z) \in (0, T) \times \Omega_h.$$

Preuve du Lemme 3.4.3 :

En écrivant le terme $\nabla_x(\xi_n \mathbf{u}_n)$ sous la forme :

$$\nabla_x(\xi_n \mathbf{u}_n) = \sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \nabla_x \mathbf{u}_n + 2 \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \otimes \nabla_x \sqrt{\xi_n},$$

on en déduit :

$$\nabla_x(\xi_n \mathbf{u}_n) \text{ est borné dans } L^2(0, T; (L^1(\Omega_h))^{2 \times 2}). \quad (3.97)$$

Ensuite, on a

$$\partial_z(\xi_n \mathbf{u}_n) = \sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \partial_z(\mathbf{u}_n) \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega_h))^2). \quad (3.98)$$

De même, il vient

$$\xi_n \mathbf{u}_n = \sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega_h))^2). \quad (3.99)$$

A partir des estimations (3.97)–(3.99), on déduit que

$$\xi_n \mathbf{u}_n \text{ est borné dans } L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega_h)^2). \quad (3.100)$$

D'autre part, en écrivant l'équation de conservation de la quantité de mouvement de (3.67) :

$$\begin{aligned} \partial_t(\xi_n \mathbf{u}_n) &= -\operatorname{div}_x(\xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) - \partial_z(\xi_n \mathbf{u}_n w_n) - \nabla_x \xi_n \\ &\quad + 2\bar{\nu}_1 \operatorname{div}_x(\xi_n D_x(\mathbf{u}_n)) + \bar{\nu}_2 \partial_z(\xi_n \partial_z \mathbf{u}_n) \\ &\quad - r \xi_n |\mathbf{u}_n| \mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

Puisque

$$\xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n = \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \otimes \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n, \quad (3.101)$$

on en déduit que :

$$\xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; (L^1(\Omega_h))^{2 \times 2}).$$

Puisque pour tout $p > 3$, $W^{1,p}(\Omega_h) \subset L^\infty(\Omega_h)$, alors

$$L^1(\Omega_h) \subsetneq (L^\infty(\Omega_h))' \subset (W^{1,p}(\Omega_h))' = W^{-1,p'}(\Omega_h)$$

où $(X)'$ désigne l'espace dual topologique de X , et $p' = \frac{p}{p-1}$ est le conjugué de p . En particulier, pour $p = 4$, on a

$$\operatorname{div}_x(\xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) \text{ borné dans } L^\infty(0, T; (W^{-2,4/3}(\Omega_h))^2).$$

De même comme $\xi_n \mathbf{u}_n w_n = \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \sqrt{\xi_n} w_n \in L^2(0, T; (L^1(\Omega_h))^2)$, il vient :

$$\partial_z(\xi_n \mathbf{u}_n w_n) \text{ borné dans } L^2(0, T; (W^{-2,4/3}(\Omega_h))^2).$$

Par ailleurs, puisque

$$\sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \partial_z \mathbf{u}_n \text{ est borné dans } L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega_h))^2)$$

et

$$\sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} D_x(\mathbf{u}_n) \text{ est borné dans } L^2(0, T; (L^{3/2}(\Omega_h))^{2 \times 2}),$$

on obtient

$$\partial_z(\sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} \partial_z \mathbf{u}_n) \text{ borné dans } L^2(0, T; (W^{-1,3/2}(\Omega_h))^2)$$

et

$$\operatorname{div}_x(\sqrt{\xi_n} \sqrt{\xi_n} D_x(\mathbf{u}_n)) \text{ borné dans } L^2(0, T; (W^{-1,3/2}(\Omega_h))^2).$$

De même, on a :

$$\nabla_x \xi_n \text{ borné dans } L^\infty(0, T, (W^{-1,3/2}(\Omega_h))^2).$$

En outre, l'injection continue de $W^{-1,3/2}(\Omega_h)$ dans $W^{-1,4/3}(\Omega_h)$ donne :

$$\partial_t(\xi_n \mathbf{u}_n) \text{ borné dans } L^2(0, T; W^{-2,4/3}(\Omega_h)^2). \quad (3.102)$$

En utilisant les estimations (3.100) et (3.102) et en appliquant le Lemme d'Aubin, on trouve finalement le résultat de compacité suivant :

$$\xi_n \mathbf{u}_n \text{ borné dans } L^2(0, T; (L^p(\Omega_h))^2), \quad \forall p \in [1, 3/2[. \quad (3.103)$$

Convergence de $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ et $\xi_n w_n$

En vue de définir la limite de la suite $\mathbf{u}_n$, on pose $\mathbf{u} = m/\xi$ pour tous les $\xi > 0$. Cependant, il y a une ambiguïté lorsque $\xi = 0$. Dans cette perspective, on prouve le lemme suivant :

Lemme 3.4.4.

1. Si $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ est solution du système (3.67) alors on a
 - $\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n$ converge fortement dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^2)$ vers $\frac{m}{\sqrt{\xi}}$.
 - $m = 0$ presque partout dans l'ensemble $\{\xi = 0\}$ et il existe une fonction $\mathbf{u}$ telle que $m = \xi \mathbf{u}$, et

$$\xi_n \mathbf{u}_n \rightarrow \xi \mathbf{u} \text{ fortement dans } L^2(0, T; (L^p(\Omega_h))^2) \text{ pour tout } p \in [1, 3/2[, \quad (3.104)$$

$$\sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \rightarrow \sqrt{\xi} \mathbf{u} \text{ fortement dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega_h))^2). \quad (3.105)$$

2. La suite $\sqrt{\xi_n} w_n$ converge faiblement dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$ vers $\sqrt{\xi} w$.

Preuve du Lemme 3.4.4 :

On renvoie à [82] et [85] pour certains détails de la preuve de la première partie du lemme. La seconde partie du lemme est obtenue par compacité faible. En effet, comme $\sqrt{\xi_n} w_n$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$, il existe, à une sous-suite près, $\sqrt{\xi_n} w_n$ qui converge faiblement vers une limite l dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_h))$. Il suffit alors de poser w :

$$w = \begin{cases} \frac{l}{\sqrt{\xi}} & \text{si } \xi > 0, \\ 0 \text{ p.p.} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Dès lors, la limite l s'écrit : $l = \sqrt{\xi} \frac{l}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\xi} w$. ■

Les estimations et convergences précédemment obtenues sont désormais suffisantes pour passer à la limite dans tous les termes du système (3.67).

Passage à la limite

À cet effet, on considère une suite $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$, solution faible des équations (3.67), satisfaisant les Lemmes 3.4.1–3.4.4 et soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \Omega_h)$ une fonction régulière à support compact telle que $\phi(T, x, z) = 0$. Alors, en écrivant la formulation faible de chacun des termes du système (3.67), i.e. en multipliant par ϕ et en intégrant sur $[0, T] \times \Omega_h$, on a :

•

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_h} \partial_t(\xi_n \mathbf{u}_n) \phi \, dx dz dt &= - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n \partial_t \phi \, dx dz dt \\ &\quad - \int_{\Omega_h} \xi_0^n \mathbf{u}_0^n \phi(0, x, z) \, dx dz. \end{aligned} \quad (3.106)$$

En utilisant les convergences (3.72) et le Lemme 3.4.3, on obtient :

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n \partial_t \phi \, dx dz dt - \int_{\Omega_h} \xi_0^n \mathbf{u}_0^n \phi(0, x, z) \, dx dz \rightarrow \\ &- \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \mathbf{u} \partial_t \phi \, dx dz dt - \int_{\Omega_h} \xi_0 \mathbf{u}_0 \phi(0, x, y) \, dx dz. \end{aligned}$$

•

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \operatorname{div}_x(\xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n) \cdot \phi \, dx dz dt = - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n : \nabla_x \phi \, dx dz dt.$$

De l'égalité (3.101) et en utilisant le Lemme 3.4.4, on a :

$$- \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n : \nabla_x \phi \, dx dz dt \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_x \phi \, dx dz dt.$$

•

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \partial_z(\xi_n \mathbf{u}_n w_n) \cdot \phi \, dx dz dt = - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n w_n \cdot \partial_z \phi \, dx dz dt.$$

Puisque $\xi_n \mathbf{u}_n w_n = \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n \sqrt{\xi_n} w_n$, par le Lemme 3.4.4, on trouve :

$$- \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n w_n \cdot \partial_z \phi \, dx dz dt \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \mathbf{u} w \cdot \partial_z \phi \, dx dz dt.$$

•

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \nabla_x \xi_n \cdot \phi \, dx dz dt = - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \operatorname{div}_x(\phi) \, dx dz dt.$$

Ensuite, grâce au Lemme 3.4.1, on a :

$$- \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \operatorname{div}_x(\phi) \, dx dz dt \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \operatorname{div}_x(\phi) \, dx dz dt$$

•

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \operatorname{div}_x(\xi_n D_x(\mathbf{u}_n)) \cdot \phi \, dx dz dt = - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n D_x(\mathbf{u}_n) : \nabla \phi \, dx dz dt.$$

Comme $D_x(\mathbf{u}_n) = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u}_n + \nabla_x^t \mathbf{u}_n)$, en développant le terme intégral ci-dessus, on écrit que :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n D_x(\mathbf{u}_n) : \nabla_x \phi \, dx dz dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} (\xi_n \mathbf{u}_n \cdot \Delta_x \phi + \nabla_x \phi \nabla_x(\sqrt{\xi_n}) \cdot \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n) \, dx dz dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} (\xi_n \mathbf{u}_n \cdot \operatorname{div}_x(\nabla_x^t \phi) + \nabla_x^t \sqrt{\xi_n} \cdot \nabla_x \phi \cdot \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n) \, dx dz dt. \end{aligned}$$

À partir des estimations (3.92), la suite $\nabla_x \sqrt{\xi_n}$ converge faiblement, et en utilisant le Lemme 3.4.1, le Lemme 3.4.3 et le Lemme 3.4.4, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} (\xi_n \mathbf{u}_n \cdot \Delta_x \phi + \nabla_x \phi \nabla_x(\sqrt{\xi_n}) \cdot \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n) \, dx dz dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} (\xi_n \mathbf{u}_n \cdot \operatorname{div}_x(\nabla_x^t \phi) + \nabla_x^t \sqrt{\xi_n} \cdot \nabla_x \phi \cdot \sqrt{\xi_n} \mathbf{u}_n) \, dx dz dt \rightarrow \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} (\xi \mathbf{u} \cdot \Delta_x \phi + \nabla_x \phi \nabla_x(\sqrt{\xi}) \cdot \sqrt{\xi} \mathbf{u}) \, dx dz dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_h} (\xi \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}_x(\nabla_x^t \phi) + \nabla_x^t \sqrt{\xi} \cdot \nabla_x \phi \cdot \sqrt{\xi} \mathbf{u}) \, dx dz dt, \end{aligned}$$

d'où

$$-\int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n D_x(\mathbf{u}_n) : \nabla_x \phi \, dx dz dt \rightarrow -\int_0^T \int_{\Omega_h} \xi D_x(\mathbf{u}) : \nabla_x \phi \, dx dz dt.$$

•

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \partial_z^2(\xi_n \mathbf{u}_n) \cdot \phi \, dx dz dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n \cdot \partial_z^2(\phi) \, dx dz dt.$$

De plus, le Lemme 3.4.3 fournit les convergences suivantes :

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \xi_n \mathbf{u}_n \cdot \partial_z^2(\phi) \, dx dz dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega_h} \xi \mathbf{u} \cdot \partial_z^2(\phi) \, dx dz dt$$

• Avec le Lemme 3.4.4, on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} r \xi_n |\mathbf{u}_n| \mathbf{u}_n \cdot \phi \, dx dz dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega_h} r \xi |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \phi \, dx dz dt,$$

d'où le résultat. ■

3.4.2 Étude de la stabilité de solutions faibles pour les EPCs

Finalement, en supposant qu'il existe une suite de solutions faibles $(\xi_n, \mathbf{u}_n, w_n)$ du système (3.67), alors le Théorème 3.4.2 assure leur stabilité. En outre, en posant $\rho(t, x, y) = \xi(t, x)e^{-y}$ et $w(t, x, z) = v(t, x, y)e^{-y}$ avec $\frac{d}{dy}z = e^{-y}$, le résultat est encore vrai et est trivialement vérifié par de simples calculs d'intégrales (comme ceux déjà établis à la Section 3.3.1). Ceci termine la preuve du Théorème 3.4.1. ■

3.5 Perspectives

Dans ce chapitre, on a étendu un résultat d'existence de solutions faibles globales en temps de Gatapov *et al.* [53] pour un modèle primitif compressible en dimension 2 d'espace. Ce résultat a été obtenu dans le cadre d'une pression barotrope d'exposant $\gamma = 1$. Une étude pour $\gamma > 1$ est en cours d'élaboration.

On a également traité le cas en dimension 3 d'espace pour lequel on a seulement un résultat de stabilité. Avec les estimations obtenues, il semblerait que l'on puisse construire une suite de solutions approchées par une approximation de type Faedo-Galerkin. Cela fait partie des travaux à venir. Dans le cadre des équations en dimension 2 d'espace, il serait également très intéressant d'étudier le cas $\gamma > 1$.

Par ailleurs, en vue d'obtenir des résultats qualitatifs, il serait intéressant de construire un schéma numérique en dimension deux et trois d'espace pour un tel modèle et de comparer les résultats à ceux obtenus par un solveur pour les équations complètes de Navier-Stokes.

PARTIE III

Travaux en cours et perspectives

CHAPITRE 4

Premiers pas vers une modélisation de phénomènes physiques complexes en écoulement mixte en conduite fermée

Sommaire

4.1 La cavitation	166
4.1.1 Historiquement	166
4.1.2 Apparition et les différentes formes de cavitation	167
4.1.3 Modélisation mathématique de la cavitation	169
4.1.4 Perspectives	173
4.2 Entraînement d'air dans une conduite fermée : approche bi-couche	174
4.2.1 Un modèle bicouche air/eau	175
4.2.1.1 Le modèle à surface libre	176
4.2.1.2 Modélisation de la couche d'air	177
4.2.1.3 Le modèle bicouche	178
4.2.2 La formulation cinétique	181
4.2.3 Le schéma cinétique	182
4.2.4 Tests numériques	183
4.2.5 Perspectives	191

Ce chapitre est le début d'un projet industriel en vue de modéliser les phénomènes de cavitation en conduite fermée en collaboration avec C. Bourdarias et S. Gerbi. La seconde partie, concernant un modèle pour la prise en compte de l'entraînement d'air en conduite fermée, est un développement de l'article

C. Bourdarias, **M. Ersoy** and S. Gerbi. *Air entrainment in transient flows in closed water pipes : a two-layer approach*. submitted, available at <http://arxiv.org/abs/0910.0334>, 2009.

NOTATIONS

- σ : nombre de cavitation
- R : rayon d'une bulle de cavitation
- p_v : pression de vaporisation
- R_c : rayon critique
- p_c : pression critique
- T_{imp} : temps d'implosion (ou de Rayleigh)

4.1 La cavitation

La cavitation⁷ est un phénomène complexe qui se produit dans la plupart des industries comme la construction navale, l'hydroélectrique, l'aérospatiale, le génie civil, l'automobile, l'industrie pétrolière, le nucléaire, le biomédical, la faune, ... En particulier, les systèmes hydrodynamiques sont constamment exposés à la cavitation comme les turbines, les pompes, les hélices et plus généralement tout système mettant en œuvre le mouvement d'un fluide. La cavitation s'accompagne le plus souvent des nuisances suivantes :

- la génération de bruit intenses et vibrations,
- l'attaque des parois (érosion de cavitation),
- l'altération des performances du système hydraulique (par exemple chute du rendement).

Il est alors naturel que la cavitation, *prima facie*, apparaisse comme un phénomène nuisible à éviter. En dépit de ses aspects négatifs, la cavitation trouve des applications dans les procédés industriels qui nécessitent la concentration d'énergie sur des petites surface afin de produire localement des pics de pression (par exemple, le massage thérapeutique). Quelque soit la (les) circonstance(s), il est d'un intérêt majeur de comprendre le mécanisme de ce dernier.

Alors concrètement qu'est ce que la cavitation ?

4.1.1 Historiquement

Historiquement, le problème de la cavitation a été posé par Toricelli, Newton, Euler, ... et l'apparition même du mot *cavitation* est née en Angleterre au XIX^{ème} siècle. Les premières études concernant le concept de *tension* au sein d'un liquide sont apparus par les expériences de Donny 1846, Berthelot 1850 et Reynolds 1882. Le nombre, sans dimension, de cavitation (ou encore de Thoma-Leroux), généralement noté σ ,

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}$$

est introduit par Thoma et Leroux en 1920, où p_∞ et u_∞ sont la pression et vitesse à l'infini, p_v est la pression de vapeur et ρ la densité du fluide. Plus ce nombre est petit et plus les chances que le liquide cave sont grandes. L'intérêt pour la cavitation débute juste après cette période. De nombreux travaux voient le jour allant des aspects théoriques aux aspects les plus pratiques pour répondre aux besoins des industries. De nos jours, bien que de nombreuses études aient été menées à ce sujet, l'origine de la cavitation reste encore mal comprise. En effet, les facteurs propres des propriétés hydrodynamiques telles que la viscosité, la turbulence, la tension superficielle, la compressibilité, les effets thermodynamiques, la qualité du fluide (présence ou non d'impuretés),

7. Cette section est issue de [8, 71, 47, 7, 4]

la nature des matériaux rendent l'étude de la cavitation difficile. En outre, ils sont à prendre en compte pour modéliser la cavitation dans le cadre d'un écoulement réel.

4.1.2 Apparition et les différentes formes de cavitation

La cavitation correspond à la formation de poches et de bulles de vapeur au sein d'un liquide initialement homogène. Elle prend des formes très différentes selon les configurations géométriques, les propriétés physiques du liquide, les contraintes qui lui sont appliquées, ... Il est donc *a priori* difficile de donner une définition. Il semblerait que la plupart des chercheurs à ce sujet soient en accord pour la définition suivante :

La cavitation est définie par la formation d'une phase vapeur au sein d'un fluide lorsque la pression atteint la pression de vapeur. Plus précisément, à l'échelle moléculaire la cavitation se traduit par la *rupture du liquide* : les molécules sont soumises à des forces qui doivent être plus grandes que la force d'attraction moléculaire.

C'est la définition que l'on donne à la cavitation lorsque l'on considère un fluide pur. En pratique, différents facteurs tels que l'impureté, des micro-inclusions d'un mélange gaz-vapeur sous forme de germes, dit de cavitation, rendent le fluide moins résistant à la rupture. En particulier, ils attendent le « bon moment » pour éclorre et donner lieu au phénomène de cavitation que l'on observe à l'échelle macroscopique. Cela justifie l'utilisation des lois de conservation de la mécanique des milieux continus.

Critère d'apparition : pression de vapeur saturante.

La vaporisation d'un liquide est le changement de phase qui le transforme en vapeur, le plus souvent produite par apport de chaleur. Elle peut également être provoquée par une mise en dépression. De surcroît, elle peut être la résultante de ces deux transformations. Ainsi, dans le diagramme de changement de phase (c.f. FIG. 4.1), le chemin (P_0, T_0) à (P_0, T_1) , i.e. élévation de la température à pression constante, correspond à une ébullition alors que le chemin reliant (P_0, T_0) à (P_1, T_0) , i.e. diminution de la pression à température constante, est le phénomène de cavitation. Dans un tube de Venturi (c.f. FIG. 4.2), par exemple, en négligeant les pertes de charges singulières (provoquées par la géométrie du convergent), en écrivant les relations de Bernoulli entre l'amont et l'aval du col :

$$p_{am} + \frac{1}{2}\rho v_{am}^2 = p_{col} + \frac{1}{2}\rho v_{col}^2$$

on obtient :

$$p_{col} = p_{am} - \frac{1}{2}\rho v_{col}^2 \left(1 - \frac{v_{am}^2}{v_{col}^2} \right)$$

ou encore en faisant intervenir le nombre de cavitation

$$\sigma = \frac{p_{col} - p_v}{\frac{1}{2}\rho v_{col}^2} = \frac{p_{am} - p_v}{\frac{1}{2}\rho v_{col}^2} + \left(\frac{v_{am}^2}{v_{col}^2} - 1 \right).$$

Donc, en augmentant la vitesse au col du Venturi, la pression p_{col} diminue. Par conséquent, si p_{col} atteint la pression de vapeur du liquide p_v alors il y aura un risque de cavitation.

Formes diverses de la cavitation.

Une zone de cavitation est un ensemble de bulles de vapeur qui interagissent non-linéairement entre elles. Selon le régime d'écoulement et la configuration géométrique du domaine, on distingue trois types de cavitation :

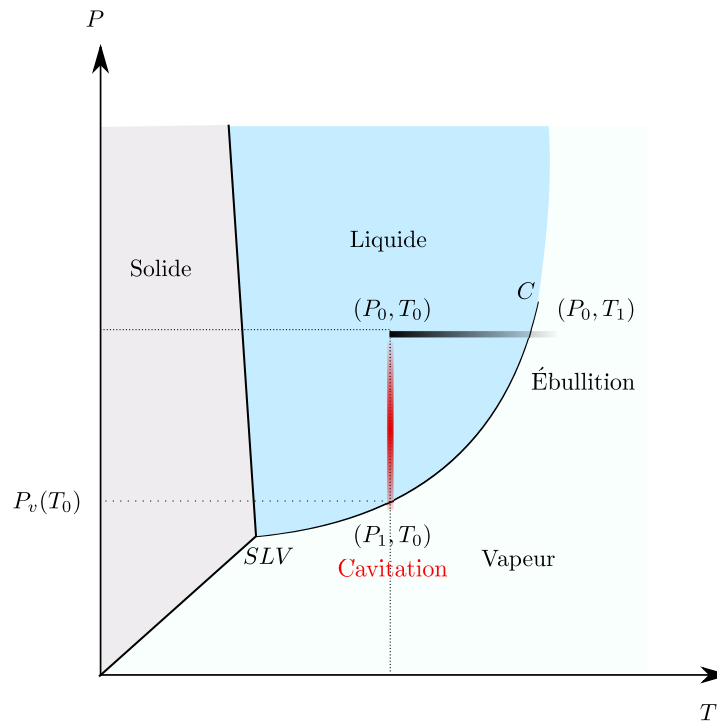


FIGURE 4.1 – Diagramme des états d'un corps et courbes de changement de phase
 $P_v(T_0)$: pression de vaporisation

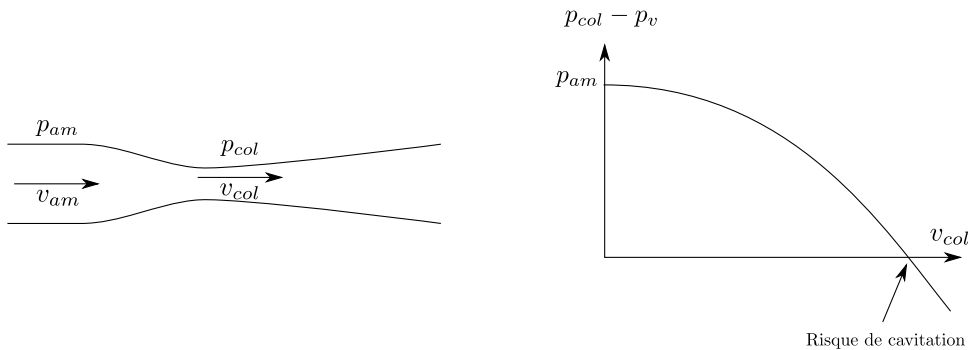


FIGURE 4.2 – Tube de Venturi

- les bulles isolées,
- les poches ou cavités attachées,
- les tourbillons.

La première catégorie concerne les bulles de cavitation. Les bulles se forment dans une région en dépression, grossissent, puis implosent dans les zones de haute pression en développant de forte pression. Le pouvoir érosif (décrit plus loin) de ces bulles est très important. On observe, par exemple, ce genre de phénomène au voisinage de pompe dans les installations d'amenée d'eau.

Le deuxième type de cavitation appelée cavité attachée apparaît souvent sous forme de poche de vapeur. Elle naît au voisinage du bord d'attaque des obstacles sous forme d'une bande vapeur unique (comme un chapelet de petites bulles) en raison des différences de pression qui règnent

à l'amont et l'aval. Quand la pression diminue, la bande de vapeur forme alors une poche de vapeur. Une fois que la cavité est suffisamment développée, elle peut devenir instable et produire un lâcher de nuages de vapeur comme une allée de Bénard-Von Karman, dont le pouvoir érosif est fort lorsqu'ils implosent au voisinage des structures.

La troisième forme est la cavitation sous forme de tourbillons cavitants. On l'observe dans les zones à forte vorticité d'écoulement. Au sein de ces tourbillons règne une zone de dépression suffisamment forte pour s'auto-alimenter par des cavités de vapeur.

4.1.3 Modélisation mathématique de la cavitation

On a vu précédemment que la cavitation se présente sous plusieurs formes :

- les bulles isolées,
- les poches ou cavité attachée et
- les tourbillons.

Le premier cas est généralement modélisé par les équations de Rayleigh-Plesset. Il permet seulement de rendre compte de la rapidité d'évolution d'un germe de cavitation et de mettre en évidence les différents cycles et la rapidité du phénomène. Il n'y a pas de création de germes au cours de la simulation.

Les modèles à « poche » sont traités par les équations de Navier-Stokes ou Euler (compressibles ou incompressibles) pour lequel l'interface est traitée comme une condition de glissement. Comme dans le modèle à bulles, il n'y a pas de création d'interface.

Enfin, à ma connaissance, les modèles les plus complets sont les modèles de « mélange » . Ils sont gouvernés par les équations de Navier-Stokes ou Euler *compressibles*. Cette approche permet de gérer l'apparition, la disparition et la coalescence d'interface vapeur-liquide. Le système est fermé par une loi d'état mathématiquement et physiquement bien choisie.

Germes de cavitation sphériques et équation de Rayleigh-Plesset.

Les germes de cavitation sont à l'origine de ce qu'on observe à l'échelle macroscopique en passant par différents cycles. La dynamique de la bulle sphérique par Rayleigh-Plesset permet de comprendre ces différentes étapes, ainsi que d'autres phénomènes tels que les oscillations, croissance asymptotique et implosion des bulles. Cependant, l'équation de Rayleigh-Plesset représente un cas particulier de la réalité car dès qu'une bulle est au voisinage d'une frontière solide ou liquide de champ de vitesse non uniforme (par exemple, des tourbillons), de champs de forces, la symétrie n'est plus conservée et les situations de croissance sont alors complètement différentes de celles décrites par cette équation.

On considère donc un germe de rayon initial R_0 immergé dans un liquide en mouvement sans vitesse de glissement. On suppose que la bulle se déforme sphériquement, est très petite par rapport au domaine fluide, obéissant à une loi newtonienne incompressible. Le germe est initialement composé d'une phase vapeur et de gaz. On suppose que la pression $p(t) = p_g(t) + p_v(t)$ ne dépend que du temps de manière à éviter des gradients de pression au sein de la bulle, où p_g étant la pression partielle du gaz non condensable et p_v la pression de vapeur saturante. En notant

- S la tension superficielle,
- μ la viscosité dynamique,
- ρ la densité du fluide,
- k l'exposant polytropique caractérisant la transformation thermodynamique (compression-dilatation) que subit le mélange gaz-vapeur contenu dans la bulle ,
- p_0 la pression à l'interface entre la bulle et le liquide,

alors l'équation de Rayleigh-Plesset est donnée par :

$$\left\{ \rho \left(R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right) + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} = \left(p_0 - p_v + 2 \frac{S}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} - p + p_v - 2 \frac{S}{R}, \right. \quad (4.1)$$

où $R(t)$ est le rayon de la bulle et $\frac{dR}{dt}$ la vitesse de déplacement de la frontière à un instant t .

On adjoint à ces équations les conditions initiales $R(0) = R_0$ et $\frac{dR}{dt}(0) = R_p^0$. Ces équations sont obtenues en dérivant l'expression traduisant l'équilibre de l'énergie cinétique du fluide et potentielle régnant au sein de la bulle. Elle peut être également dérivée à partir des équations de Navier-Stokes. On trouve également une formulation de ces équations en terme de volume de bulle et non de rayon ; voir à cet effet les récents travaux de Leighton [72].

Remarque 4.1.1. Le terme $p_0 - p_v + \frac{2S}{R_0}$ est la pression partielle du gaz, sachant que la pression de vapeur saturante est supposée constante.

En supposant que la dérivée temporelle de R soit négligeable par rapport aux termes de droite de l'équation (4.1), et en posant $k = 1$ (i.e. transformation isotherme), on se ramène à l'équilibre quasi-statique de Blake 1949 . Il permet de décrire le lieu géométrique des pressions et rayons critiques (c.f. FIG. 4.3) et de comprendre la croissance d'une bulle de cavitation. La paire pression-rayon critique est donnée par la formule :

$$R_c = \sqrt{\frac{3 \left(p_0 - p_v + \frac{2S}{R_0} \right) R_0^3}{2S}}, \quad (4.2)$$

$$p_c = p_v - \frac{4S}{3R_c}. \quad (4.3)$$

Cette solution permet de décrire qualitativement l'évolution d'un germe qui traverse une zone en dépression. Pour reprendre l'exemple précédent, i.e. le col de Venturi (c.f. FIG. 4.2 et FIG. 4.4), on suppose qu'un germe de rayon R_0 est advecté par l'écoulement à vitesse uniforme. Il y a deux cas de figure :

- ou bien, la pression minimale au niveau du col est supérieure à la pression critique p_c (4.3) alors la bulle grossit et revient à sa position initiale une fois le col franchi,
- ou bien, la pression minimale au niveau du col est inférieure à la pression critique (4.3) alors la bulle grossit et devient instable, i.e. il y a apparition du germe de cavitation proprement dit.

À la figure 4.4, on illustre la croissance d'un germe de cavitation. La courbe de pression est de tel sorte que $p_{min} < p_c$. Le germe grossit et atteint un rayon R_c à partir duquel la particule est visible à l'échelle macroscopique et est fortement éloignée de sa position d'équilibre. La pression extérieure croissante ramène brusquement la bulle à une taille R_1 nettement inférieure à celle de sa position : c'est le phénomène d'implosion. Pendant ce laps de temps très court, appelé *temps d'implosion*, la particule peut osciller autour de sa position d'équilibre avant de se stabiliser.

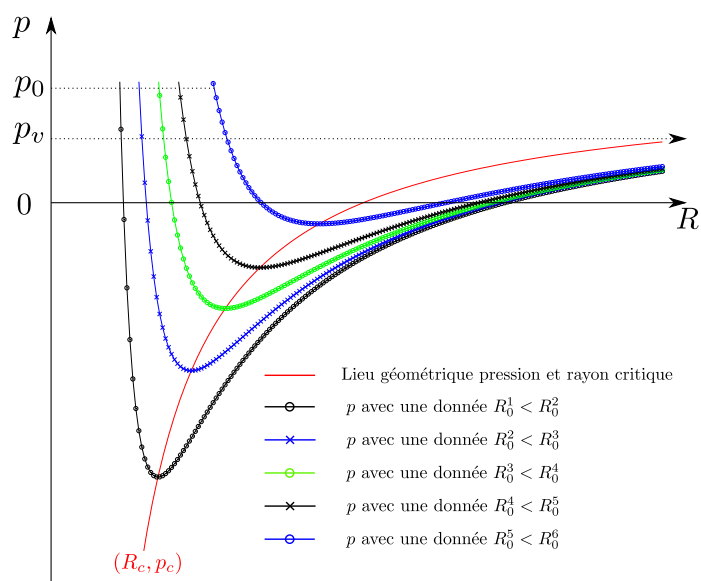


FIGURE 4.3 – Solution quasi-statique de l'équation de Rayleigh-Plesset pour différentes données de R_0

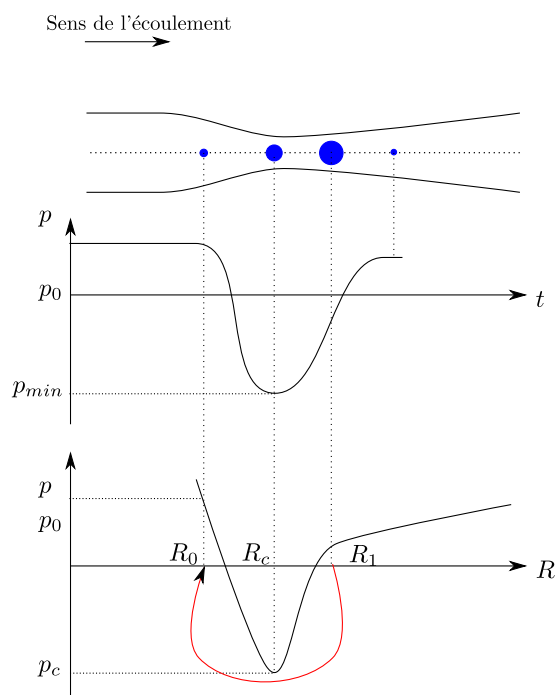


FIGURE 4.4 – Stade de croissance d'un germe de cavitation

Pendant l'implosion, les variations du rayon ne sont plus négligeables tandis que les effets visqueux et de tension superficielle deviennent petits, l'équation (4.1) permet de déterminer le

temps d'implosion, ou encore *temps de Rayleigh* par :

$$T_{imp} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} \sqrt{\frac{\rho}{p_v - p}},$$

et la vitesse radiale

$$\left| \frac{dR}{dt} \right| \approx_{R \sim 0} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p - p_v}{\rho} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3/2}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

À titre d'exemple, une bulle d'air soumise à une surpression de 1 bar implose en 0,005 secondes et pour $\frac{R}{R_0} = \frac{1}{20}$, l'interface se déplace à 720 m/s.

Mécanisme de l'implosion, onde de choc et érosion de cavitation.

L'implosion d'une bulle (ou *collapse*) de cavitation au voisinage d'une paroi produit un pic de pression local d'un ordre de quelques *MPa* qui peut être plus grand que l'ordre de sollicitation élastique limite du matériau. D'autre part, il y a une forte augmentation de la température localisée au point du pic de pression. La raison de cette surpression et de ce réchauffement est due à la présence d'une onde de choc créée juste après l'implosion de la bulle. Fujikawa *et al.* [49] présente les résultats de calculs de l'implosion d'une bulle.

Très schématiquement, en début d'implosion, la pression dans la bulle est de l'ordre de la pression de vapeur saturante. La pression, en augmentant, indique la fin de l'implosion. La pression ainsi que la température atteignent de fortes valeurs positives. La vitesse de l'interface étant si grande (décrit précédemment), la quantité de vapeur n'a pas le temps de se condenser. Elle se retrouve piégée et donc comprimée à un niveau très élevée de pression. La bulle voit son rayon diminuer fortement. Par suite, il se propage dans le liquide une onde de choc qui s'éloigne progressivement de la bulle.

Il est clair que la présence d'une onde de choc suggère un modèle compressible. Bien que le modèle de Rayleigh-Plesset soit incompressible, il a fait ses preuves [47]. À ce jour il existe différentes versions améliorées avec prise en compte de la compressibilité (voir par exemple [8]).

Cavitation par poche.

Le modèle précédent permet seulement de simuler la croissance d'un germe existant et ce, loin des parois (pour éviter de violer l'hypothèse de croissance sphérique de la bulle).

En réalité, la cavitation (comme il a été décrit plus haut) se présente de manières variées et dépend de la géométrie et de la nature de l'écoulement. En général, le phénomène est très instationnaire.

Il convient alors de définir un cahier des charges qui prennent en compte tous ces points. Un modèle particulièrement bien adapté [47], est sans doute, un modèle à deux phases et tridimensionnel. Il permettrait certainement de traiter tous les formes d'apparition de la cavitation. Néanmoins, un tel modèle demanderait beaucoup de ressources numériques.

Il existe plusieurs modèles avec des hypothèses simplificatrices pour simuler un cas particulier de cavitation. Dans [47], par exemple, on trouve des modèles mathématiques pour la simulation de poches attachées ou de flot à bulles séparées lorsque l'obstacle est un profil d'aile. L'analyse est basée sur celle de l'écoulement stationnaire.

Pour les écoulements non stationnaires, quelque soit la forme de cavitation simulée, une bonne technique de suivi d'interface est nécessaire (le lecteur est renvoyé à [7] pour les différentes techniques de suivi d'interface). Enfin, les modèles utilisés pour la simulation de la cavitation sont, en général, les équations de Navier-Stokes ou Euler compressibles ou incompressibles :

- où l'interface est traitée comme une condition de glissement,
- avec mélange.

Dans la suite, on s'intéresse aux modèles de mélange [7] (ou drift-flux).

On a vu que lors d'une vaporisation deux phénomènes se produisent selon s'il y a augmentation de la température à pression constante, ou diminution de la pression à température constante. Il convient alors d'une part d'intégrer un terme de température pour l'ébullition et d'autre part d'avoir une loi de pression adéquate rendant compte de la cavitation. La vaporisation se traduit aussi par un transfert de masse entre la phase liquide et la phase gazeuse. Il est donc nécessaire d'introduire un terme source. Les équations compressibles de base proposés par [7] sont :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad (4.4)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \quad (4.5)$$

$$\partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p)u) = \partial_x(\lambda \nabla T), \quad (4.6)$$

$$\partial_t(\rho y) + \partial_x(\rho y u) = \mu, \quad (4.7)$$

où $\rho(t, x)$ est la densité, $p(t, x)$ est la pression, $E(t, x)$ est l'énergie, de mélange. $u = u(t, x)$ est la vitesse du fluide. Le terme $\partial_x(\lambda \nabla T)$ correspond à une diffusion de chaleur de coefficient λ . Les quantités y et μ sont, respectivement, la fraction massique et le terme source prenant compte du transfert de masse entre les deux phases. La densité de mélange est donnée par :

$$\rho = y\rho_2 + (1 - y)\rho_1$$

avec $y(t, x) = 0$ si le volume occupé contient seulement le fluide 1, et 1 pour le fluide 2. De la même manière, on définit E_i , et p_i , $i = 1, 2$.

La difficulté dans ce genre de modèle est de choisir une loi de pression et un terme source. Par exemple dans [7], le choix du terme source est effectué selon un critère d'admissibilité physique et mathématique. Il considère un mélange idéal où la vapeur et le liquide satisfont tous les deux la loi des gaz raides. Pour plus de détails à ce sujet on se réfère à [7].

4.1.4 Perspectives

En raison de la présence de coup de bélier dans un écoulement mixte en conduite fermée, le risque de cavitation du fluide est important. Les effets d'érosion de cavitation peuvent être tellement violents et localisés qu'ils sont en mesure de provoquer la rupture de la conduite. Le même problème se pose pour les pompes hydrauliques. Il est donc d'un intérêt majeur de pouvoir anticiper les zones à forte cavitation en vue de construire les structures.

Il est donc nécessaire de prendre en compte ce genre de phénomène sous forme d'un modèle de mélange. La présence de l'air dans le modèle à deux phases envisagé est primordiale car elle permet de préserver un certain équilibre de la pression. De plus, il est aussi important de prendre en compte l'effet de l'entraînement d'air qui a tendance à diminuer les surpressions issues d'un coup de bélier, donc amoindrir les dépressions. Dans le même esprit des équations **PFS**, un modèle mixte en conduite fermée à deux phases est cours d'élaboration.

NOTATIONS

- $A(t, x)$: aire mouillée
- $Q(t, x)$: débit d'eau
- $M(t, x)$: aire mouillée de gaz
- $D(t, x)$: débit de gaz
- $\Omega_\alpha(t, x)$: section d'eau si $\alpha = w$, sinon c'est la section d'air si $\alpha = a$
- $H_\alpha(t, x)$: hauteur d'eau si $\alpha = w$, sinon c'est la hauteur d'air si $\alpha = a$
- $R(x)$: rayon de la section Ω de la conduite

4.2 Entraînement d'air dans une conduite fermée : approche bi-couche

On trouve dans la littérature une vaste série d'articles et de livres concernant l'étude des écoulements transitoires en conduite fermée, par exemple Hamam et McCorquodale [61], Song *et al.* [97], Wylie et Streeter [109].

Le mélange gaz-liquide se produit dans divers installations industrielles tels que les centrales nucléaires, les industries du pétrole, les centrales géothermiques, les stations de pompage, les égouts ... Le gaz est alors dissout, et/ou est entraîné et modifie considérablement la dynamique de l'écoulement. En particulier, il y a chute ou augmentation de la pression provoquant un coup de bélier, puis des dépressions avec risque de cavitation.

Contrairement à un liquide pur dans lequel la vitesse d'onde est constante, dans un mélange gaz-liquide, elle évolue avec les variations de pression. Ainsi, l'analyse des phénomènes transitoires dans ces milieux est plus complexe car, les principaux coefficients dans les équations de conservations, dépendant de la pression, sont modifiés. Tous les modèles faisant intervenir un mélange gaz-liquide sont communément appelés les *modèles à deux composantes*.

Les équations les plus largement utilisés pour modéliser un fluide à deux composantes sont les modèles homogènes [37], le modèle drift-flux [45, 63, 64], et les modèles à flux séparés, [101, 36].

Dans le modèle homogène, les deux phases sont considérées comme un seul pseudo-fluide avec des propriétés moyennes [37, 109] : il n'y a pas de mouvement relatif ou de glissement entre les deux phases. Les équations qui régissent ce modèle sont les mêmes que celle d'un écoulement monophasique. Cependant, les effets d'inertie et de gravitation jouant un rôle plus important que la vitesse relative entre la phase air et la phase liquide, l'interaction entre phases doit être prise en compte.

Les modèles drift-flux, [45, 63, 64], sont une sous catégorie de modèles plus généraux, à savoir les modèles à deux phases. À un volume de contrôle donné, il correspond une fraction volumique de liquide et de gaz. À chacune de ces phases, on associe une vitesse et un flux, appelés *drift-velocity* et *drift-flux*. Ce champs de vitesse et le flux dépendent alors du paramètre fraction volumique déterminant les fractions que constitue ce volume de contrôle. Cette manipulation permet de diviser par deux le nombre d'équations initiales correspondant aux lois pour chacune des phases.

Dans cette section, on considère un écoulement à surface libre en conduite fermée avec prise en compte de l'entraînement d'air dans un contexte très simplifié à deux couches (donc non miscible) sans échange avec le milieu extérieur. Les équations à surface libre sont obtenues de la même manière que celles présentées au Chapitre 1- Section 1.2, régit par une loi de pression hydrostatique. Pour écrire les équations dynamiques pour la couche d'air, on suppose que le gaz est compressible et isotherme : ainsi, on postule une loi de pression donnée $p = k\rho^\gamma$ où γ est le

coefficient adiabatique. Pour connecter les deux couches, on écrit la continuité de la contrainte normale à l'interface air-eau : la loi de pression hydrostatique est ainsi couplée à celle de l'air. Les équations sont alors aux nombres de quatre qu'on appelle « toy model ». On obtient au Théorème 4.2.1 les propriétés principales du modèle : existence d'une énergie globale en dépit de la non stricte hyperbolicité (excepté pour un écoulement où les vitesses de chaque couche sont identiques). La dérivation et les propriétés mathématiques du modèle sont établies en Section 4.2.1.

La difficulté principale de la construction d'un schéma numérique pour le modèle proposé provient de la non stricte hyperbolicité : les valeurs propres de la matrice de convection peuvent être complexes. De plus, on n'a pas de formules explicites sauf lorsque la vitesse de chacune des couches sont proches. Dans ce contexte, il n'y a aucune raison que la vitesse de l'air soit proche de celle de l'eau et en particulier, elles peuvent être très différentes. C'est pour cette raison qu'on opte pour un schéma cinétique (introduit au Chapitre 2-Section 2.3). Dans cette perspective, on présente la formulation cinétique du système à quatre équations à la Section 4.2.2. Par suite, cette formulation permet de construire aisément un schéma cinétique (c.f. Section 4.2.3). On termine par quelques simulations numériques (c.f. Section 4.2.4).

4.2.1 Un modèle bicouche air/eau

On considère une conduite dans lequel l'écoulement est à surface libre. Il est composé d'une couche d'air et d'une couche d'eau séparées par une interface mobile. Ces deux dernières sont supposées non miscibles ; i.e. on néglige les échanges de masses entre couche tels que l'évaporation et la condensation. On se place dans un cadre fluide et gaz parfait : incompressible, isentropique pour l'eau et compressible, isentropique pour le gaz. La dérivation des équations est obtenue par intégration verticale des équations d'Euler 3D (incompressible pour l'eau, compressible pour l'air).

Remarque 4.2.1. *Tout le long de cette partie, on utilise la notation suivante : les quantités indexées par w seront associées à la couche d'eau et celles par a seront associées à la couche d'air. On utilise aussi l'indice α pour désigner indifféremment la couche d'air et/ou d'eau.*

La conduite est supposée infiniment rigide, ayant un axe de symétrie $\mathcal{C}$ qui est représenté par l'axe $z = b(x)$, et pour simplifier, l'angle d'inclinaison θ entre cet axe et l'horizontale est constant. Le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est mobile le long de cet axe, le vecteur $\mathbf{k}$ est orthogonal à $\mathbf{i}$ dans le plan vertical contenant $\mathcal{C}$, (voir FIG. 4.5).

On note $\Omega_{t,a}$ et $\Omega_{t,w}$ le domaine occupé par l'air et l'eau au temps t . Pour tout points $\omega(x) \in \mathcal{C}$, on définit la section d'eau $\Omega_w(t, x)$ par :

$$\Omega_w(t, x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; z \in [-R(x), -R(x) + H_w(t, x)], y \in [\beta_l(x, z), \beta_r(x, z)]\}$$

et celle de l'air par :

$$\Omega_a(t, x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; z \in [-R(x) + H_w(t, x), R(x)], y \in [\beta_l(x, z), \beta_r(x, z)]\}$$

où $R(x)$ est le rayon de la section, $H_w(t, x)$ la hauteur d'eau de la section $\Omega_w(t, x)$, $H_a(t, x)$ la hauteur d'air de la section $\Omega_a(t, x)$. $\beta_l(x, z)$, $\beta_r(x, z)$ sont les points de frontières à l'altitude z , $-R(x) < z < R(x)$ (c.f. FIG. 4.5 et FIG. 4.6). Compte tenu de la configuration géométrique, on a un premier couplage :

$$H_w(t, x) + H_a(t, x) = 2R(x). \quad (4.8)$$

Dans ce qui suit, on note $h_w(t, x) = -R(x) + H_w(t, x)$ la hauteur d'eau algébrique.

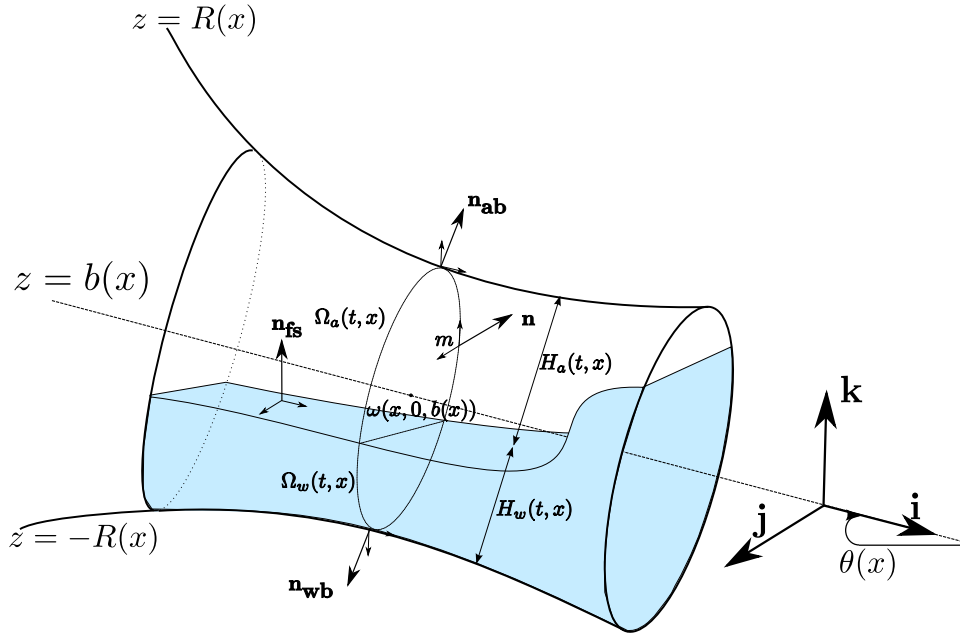


FIGURE 4.5 – Caractéristiques géométrique du domaine

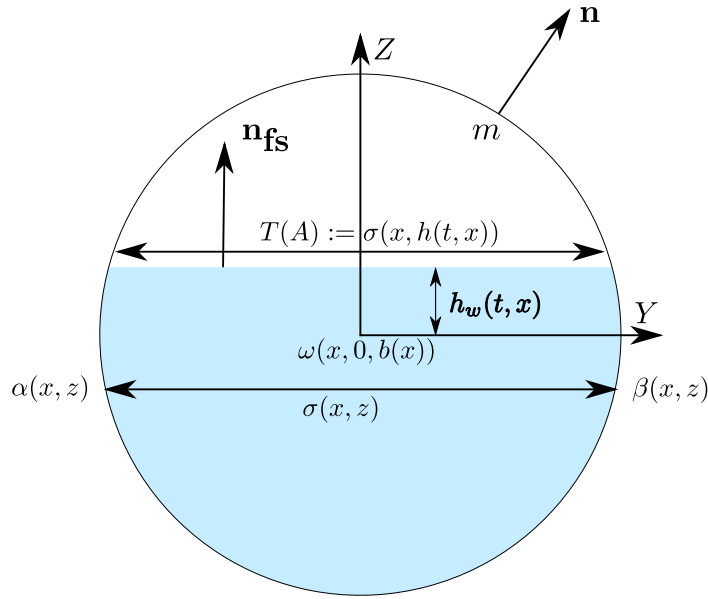


FIGURE 4.6 – Section verticale

4.2.1.1 Le modèle à surface libre

Les équations à surface libre sont obtenues de la même manière qu'au Chapitre 1- Section 1.2. La seule différence provient de la condition à la surface libre, ici on impose la continuité de la pression d'eau et d'air, à savoir :

$$g(h_w - z) \cos \theta + P_a(\bar{p})/\rho_0$$

où le terme $g(h_w - z) \cos \theta$ est la pression hydrostatique et, $P_a(\bar{\rho})$ représente la pression de l'air, ρ_0 est la densité à pression atmosphérique et $\bar{\rho}$ la densité moyenne de l'air le long de la section $\Omega_a(t, x)$.

Les équations de la couche d'eau sont alors :

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + AP_a(\bar{\rho})/\rho_0 + gI_1(x, A) \cos \theta \right) &= -gA \partial_x Z \\ &+ gI_2(x, A) \cos \theta \\ &+ P_a(\bar{\rho})/\rho_0 \partial_x A. \end{cases} \quad (4.9)$$

où g est la constante de gravité et $Z(x) := b(x)$, $P_a(\bar{\rho})/\rho_0$ le terme source de pression due à l'interaction air/eau. Les termes $I_1(x, A)$ et $I_2(x, A)$ sont les termes de pression hydrostatique et de terme source de pression :

$$I_1(x, A) = \int_{-R}^{h_w} (h_w - z) \sigma(x, z) dz$$

et

$$I_2(x, A) = \int_{-R}^{h_w} (h_w - z) \partial_x \sigma(x, z) dz.$$

4.2.1.2 Modélisation de la couche d'air

La dérivation des équations relatives à la couche d'air est obtenue par intégration verticale des équations d'Euler compressibles :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_a + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{U}_a) &= 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \Omega_{t,a} \\ \partial_t(\rho_a \mathbf{U}_a) + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{U}_a \otimes \mathbf{U}_a) + \nabla P_a &= 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \Omega_{t,a} \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $\mathbf{U}_a(t, x, y, z) = (U_a, V_a, W_a)$ et $\rho_a(t, x, y, z)$ sont le champ de vitesse et la densité de l'air avec $P_a(t, x, y, z)$ une loi de pression scalaire.

Remarque 4.2.2. On ne considère que l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur U_a comme pour la dérivation du modèle en charge Chapitre 1- Section 1.3.

On note $\bar{\rho}$ la moyenne de la densité d'air suivant la section Ω_a . On suppose que la couche d'air obéit à la loi des gaz parfait. La pression est donnée par la loi d'état :

$$P_a(\rho) = k \rho^\gamma \text{ avec } k = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma} \quad (4.11)$$

pour une pression de référence p_a et une densité de référence ρ_a . L'exposant adiabatique, dans les conditions usuelles de pression et de température, est donnée par $\gamma := \frac{d + \beta + 2}{d + \beta}$ où $d = 3$ est la dimension et β est le nombre d'atomes. Il vaut $\gamma = \frac{7}{5}$ pour l'air.

On introduit la section d'air $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega_a} dy dz$$

et la vitesse moyenne de la section d'air v (on rappelle que u est celle de la couche d'eau) par :

$$v(t, x) = \frac{1}{\mathcal{A}(t, x)} \int_{\Omega_a} U_a(t, x, y, z) dydz.$$

Les variables conservatives choisies sont $M = \bar{\rho}/\rho_0 \mathcal{A}$ et $D = Mv$.

Comme dans le cas des équations en charge, on procède à l'intégration verticale des équations d'Euler (4.10) le long de la section Ω_a , et en supposant l'approximation (comme dans le Chapitre 1- Section 1.3 ou Chapitre 1- Section 1.2) : $\bar{u}^2 \approx \bar{u} \bar{u}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M + \partial_x D = \int_{\partial\Omega_a} \rho/\rho_0 (\partial_t \mathbf{m} + v \partial_x \mathbf{m} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds, \\ \partial_t D + \partial_x \left(\frac{D^2}{M} + P_a(\bar{\rho})/\rho_0 \mathcal{A} \right) = P_a(\bar{\rho})/\rho_0 \partial_x(\mathcal{A}) \\ \quad + \int_{\partial\Omega_a} \rho/\rho_0 v (\partial_t \mathbf{m} + v \partial_x \mathbf{m} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

La frontière $\partial\Omega_a$ étant divisé en une partie en contact avec la surface libre Γ_{fs} et l'autre avec le bord de la conduite Γ_c , on écrit :

- en notant un point $m \in \Gamma_c$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}$ le vecteur normal unitaire sortant au point m dans le plan Ω et $\mathbf{m}$ le vecteur ωm tandis que $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{fs}$ sur Γ_{fs} . La conduite étant infiniment rigide, la condition de non pénétration sur Γ_c , donne : $\mathbf{U}_a \cdot \mathbf{n}_{ab} = 0$ (c.f. FIG. 4.5).
- la condition usuelle de cinématique à la surface libre qui permet d'éliminer les intégrales de bord dans les équations (4.12).

En utilisant la loi d'état (4.11) et la vitesse du son dans l'air :

$$c_a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = k\gamma \left(\frac{\rho_0 M}{\mathcal{A}} \right)^{\gamma-1}, \quad (4.13)$$

on obtient le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M + \partial_x D = 0, \\ \partial_t D + \partial_x \left(\frac{D^2}{M} + \frac{M}{\gamma} c_a^2 \right) = \frac{M}{\gamma} c_a^2 \frac{\partial_x(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

4.2.1.3 Le modèle bicouche

Le modèle bicouche est alors obtenu par superposition des modèles (4.9) et (4.14), en utilisant le couplage (4.8) qui s'écrit en terme surfacique $\mathcal{A} + A = S$ où $S = S(x)$ est la section de la conduite, en remplaçant dans (4.12) $\mathcal{A}$ par $S - A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M + \partial_x D = 0, \\ \partial_t D + \partial_x \left(\frac{D^2}{M} + \frac{M}{\gamma} c_a^2 \right) = \frac{M}{\gamma} c_a^2 \frac{\partial_x(S - A)}{S - A}, \\ \partial_t A + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1(x, A) \cos \theta + A \frac{c_a^2 M}{\gamma(S - A)} \right) = -gA \partial_x Z \\ \quad + I_2(x, A) \cos \theta \\ \quad + \frac{c_a^2 M}{\gamma(S - A)} \partial_x A. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Ce modèle n'est pas strictement hyperbolique puisque les valeurs propres peuvent être complexes et généralement elle ne sont pas données explicitement. En effet, en notant $\mathbf{W} = (M, D, A, Q)^t$ les variables conservatives, et en supposant $\theta = 0$ et $S(x) = cte$ (pour simplifier), le système (4.15) s'écrit sous forme non conservative :

$$\partial_t \mathbf{W} + \mathcal{D}(\mathbf{W}) \partial_X \mathbf{W} = TS(\mathbf{W}), \quad (4.16)$$

où $\mathcal{D}$ est la matrice de convection

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_a^2 - v^2 & 2v & \frac{M}{S-A} c_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A}{(S-A)} c_a^2 & 0 & c_w^2 + \frac{AM}{(S-A)^2} c_a^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

avec c_a étant la vitesse du son dans l'air donnée par (4.13), celle de l'eau $c_w = \sqrt{g \frac{A}{T(A)} \cos \theta}$ et enfin $T(A)$ la largeur de la surface libre.

Les valeurs propres sont alors racines du polynôme caractéristique :

$$(\lambda^2 - 2v\lambda + (c_a^2 - v^2)) \left(\lambda^2 - 2u\lambda - \left(c_w^2 + \frac{AM}{(S-A)^2} c_a^2 - u^2 \right) \right) = \frac{AM}{(S-A)^2} c_a^4.$$

Dans le cas où les valeurs des vitesses u et v sont proches, on peut explicitement écrire les valeurs propres : on a 4 valeurs propres distinctes. Par exemple, dans le cas où $u = v$, on a

$$u \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \left(c_a^2 \left(1 + \frac{AM}{(S-A)^2} \right) + c_w^2 \right) \pm \sqrt{\left(c_a^2 \left(1 - \frac{AM}{(S-A)^2} \right) + c_w^2 \right)^2 + 4c_a^4 \frac{AM}{(S-A)^2}}}$$

avec généralement 2 valeurs propres complexes et 2 réelles rendant le système non hyperbolique. Ainsi, toute méthode numérique nécessitant le calcul des valeurs propres, par exemple VFRoe ou HLL, n'est pas approprié sauf dans le cas $u \approx v$ où lorsque la densité d'air est faible (e.g. $c_a \approx 0$). En effet, dans ce dernier cas le système est strictement hyperbolique et admet pour valeurs propres $v, v, u \pm c_w$.

Cependant, dans ce contexte et dans le cas particulier d'un ressaut hydraulique, l'air est expulsé et les vitesses de l'eau et de l'air peuvent être de signe opposé. De plus, dans le cas d'une poche d'air piégée, les effets de compressibilité sont à prendre en compte. Par conséquent, on est presque toujours dans la situation où les valeurs propres ne sont pas explicites. Il est donc naturel d'utiliser un solveur cinétique (c.f. Section 4.2.2 et Section 4.2.3).

Les propriétés mathématiques du système (4.15) sont présentées dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.1.

1. Pour des solutions régulières de (4.15), les vitesses u et v satisfont :

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} + \frac{c_a^2}{\gamma - 1} \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} + gh_w(A) \cos \theta + gZ + \frac{c_a^2 M}{\gamma(S-A)} \right) = 0. \quad (4.18)$$

2. Pour des solutions régulières, le système (4.15) admet une énergie mathématique totale

$$E = E_a + E_w$$

avec

$$E_a = \frac{Mv^2}{2} + \frac{c_a^2 M}{\gamma(\gamma - 1)}$$

et

$$E_w = \frac{Au^2}{2} + gA(h_w - I_1(x, A)/A) \cos \theta + gAZ$$

qui satisfait l'égalité d'entropie :

$$\partial_t E + \partial_x H = 0.$$

Le flux d'entropie total H est défini par

$$H = H_a + H_w$$

où H_a , le flux d'entropie pour l'air, est donné par :

$$H_a = \left(E_a + \frac{c_a^2 M}{\gamma} \right) v$$

et H_w , le flux d'entropie pour l'eau, est donné par :

$$H_w = \left(E_w + gI_1(x, A) \cos \theta + A \frac{c_a^2 M}{(S - A)} \right) u.$$

3. Les entropies E_a et E_w satisfont respectivement l'égalité d'entropie :

$$\partial_t E_a + \partial_x H_a = \frac{c_a^2 M}{\gamma(S - A)} \partial_t A \quad (4.19)$$

et

$$\partial_t E_w + \partial_x H_w = -\frac{c_a^2 M}{\gamma(S - A)} \partial_t A. \quad (4.20)$$

Remarque 4.2.3. Pour des solutions faibles les égalités sont des inégalités.

Preuve du Théorème 4.2.1 :

La preuve de ce résultat relève de calculs algébriques similaires à ceux de la démonstration du Théorème 1.4.1.

■

Remarque 4.2.4. On peut interpréter les équations (4.19) et (4.20) comme l'échange d'énergie entre les deux couches. L'énergie dissipée (ou accumulée) par une couche est transmise à (ou perdue par) l'autre. Le cadre physique considérée étant isolé, il y a donc conservation de l'énergie totale

$$\partial_t E + \partial_x H = 0.$$

4.2.2 La formulation cinétique

On rappelle la formulation cinétique introduite au Chapitre 2- Section 2.3.1.

On considère une fonction χ réelle qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = 1. \quad (4.21)$$

On définit la quantité

$$\mathcal{M}_\alpha(t, x, \xi) = \frac{A_\alpha}{b_\alpha} \chi\left(\frac{\xi - u_\alpha}{b_\alpha}\right)$$

qui représente la densité de particule au temps t , en x et à vitesse cinétique ξ . Le terme b est donnée par

$$b_\alpha^2 = \begin{cases} \frac{c_a^2}{\gamma M} & \text{si } \alpha = a, \\ g \frac{I_1(x, A)}{A} \cos \theta + \frac{c_a^2 M}{\gamma (S - A)} & \text{si } \alpha = w. \end{cases}$$

On note :

$$(A_\alpha, Q_\alpha, u_\alpha) = \begin{cases} (A, Q, u) & \text{si } \alpha = w, \\ (M, D, v) & \text{si } \alpha = a. \end{cases}$$

La formulation cinétique associée au système (4.15) est :

Théorème 4.2.2. (A_α, Q_α) est une solution de (4.15) si et seulement si $\mathcal{M}_\alpha$ satisfait les deux équations de transport (une pour chaque couche) :

$$\partial_t \mathcal{M}_\alpha + \xi \partial_X \mathcal{M}_\alpha + \phi_\alpha \partial_\xi \mathcal{M}_\alpha = K_\alpha(t, x, \xi) \quad \text{pour } \alpha = a \text{ et } \alpha = w \quad (4.22)$$

où $K_\alpha(t, x, \xi)$ est le noyau de collision qui vérifie pour presque tout (t, x)

$$\int_{\mathbb{R}} K_\alpha d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi K_\alpha d\xi = 0. \quad (4.23)$$

La fonction ϕ_α est définie par :

$$\phi_\alpha = \begin{cases} -\frac{c_a^2}{\gamma} \partial_x \ln(S - A) & \text{si } \alpha = a, \\ g \partial_x Z - g \frac{I_2(x, A)}{A} \cos \theta - \frac{M}{S - A} \frac{c_a^2}{\gamma} \partial_x \ln(A) & \text{si } \alpha = w. \end{cases} \quad (4.24)$$

Preuve du Théorème 4.2.2 :

Il suffit de prendre les deux premiers moments des équations (4.22) en utilisant :

$$A_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\alpha(\xi) d\xi, \quad (4.25)$$

$$Q_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{M}_\alpha(\xi) d\xi, \quad (4.26)$$

$$\frac{Q_\alpha^2}{A_\alpha} + b_\alpha^2 A_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}_\alpha(\xi) d\xi. \quad (4.27)$$

4.2.3 Le schéma cinétique

Par simplicité, on considère ici une conduite uniforme infinie, i.e. $S(x) = \text{cte}$ et $I_2(x, A) = 0$. On discrétise la conduite en maille $(m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, de taille h_i , donnée par

$$m_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, i \in \mathbb{Z}.$$

Soit $\Delta t^n = t_{n+1} - t_n$, $n \in \mathbb{N}$ le pas de temps. On note $U_{\alpha,i}^n = (A_{\alpha,i}^n, Q_{\alpha,i}^n)$, $u_{\alpha,i}^n = \frac{Q_{\alpha,i}^n}{A_{\alpha,i}^n}$, respectivement, les approximations des valeurs moyennes de (A_α, Q_α) et des vitesses u_α sur m_i au temps t_n . Soit $\mathcal{M}_{\alpha,i}^n(\xi) = \frac{A_{\alpha,i}^n}{b_{\alpha,i}^n} \chi\left(\frac{\xi - u_{\alpha,i}^n}{b_{\alpha,i}^n}\right)$ l'approximation de la densité de particules.

Si $Z(x)$ est la fonction décrivant l'altitude de la conduite, on considère sa représentation constante par maille $\bar{Z}(x) = Z_i \mathbb{1}_{m_i}(x)$ où $Z_i = Z(x_i)$ par exemple.

En remplaçant, Z par $\bar{Z}$ dans ϕ_α défini par (4.24) et en négligeant le terme $K(t, x, \xi)$, l'équation (4.22) dans la maille m_i s'écrit (puisque $\phi_\alpha = 0$ dans m_i) :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + \xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}_\alpha = 0 \quad \text{pour } x \in m_i. \quad (4.28)$$

En définissant la donnée, $x \in m_i$, $f_\alpha(t_n, x, \xi) = \mathcal{M}_{\alpha,i}^n(\xi)$ par l'équilibre de Gibbs (voir Chapitre 2- Section 2.3.1) associée à $A_{\alpha,i}^n$ et $Q_{\alpha,i}^n$, on discrétise l'équation (4.28) comme suit :

$$f_{\alpha,i}^{n+1}(\xi) = \mathcal{M}_{\alpha,i}^n(\xi) + \frac{\Delta t}{h_i} \xi \left(\mathcal{M}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^-(\xi) - \mathcal{M}_{\alpha,i-\frac{1}{2}}^+(\xi) \right) \quad (4.29)$$

où les flux numériques microscopiques $\mathcal{M}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^\pm$ sont donnés par (c.f. Chapitre 2-Section 2.3.2.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^-(\xi) &= \mathbb{1}_{\{\xi > 0\}} \mathcal{M}_{\alpha,i}^n(\xi) + \mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}} < 0\}} \mathcal{M}_{\alpha,i}^n(-\xi) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\xi < 0, \xi^2 - 2g\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}} > 0\}} \mathcal{M}_{\alpha,i+1}^n \left(-\sqrt{\xi^2 - 2g\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}}} \right) \\ \mathcal{M}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^+(\xi) &= \mathbb{1}_{\{\xi < 0\}} \mathcal{M}_{\alpha,i+1}^n(\xi) + \mathbb{1}_{\{\xi > 0, \xi^2 + 2g\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}} < 0\}} \mathcal{M}_{\alpha,i+1}^n(-\xi) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\xi > 0, \xi^2 + 2g\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}} > 0\}} \mathcal{M}_{\alpha,i}^n \left(\sqrt{\xi^2 + 2g\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec

$$\Delta\phi_{\alpha,i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} -\frac{\tilde{c}_a^2}{\gamma} \ln \left(\frac{S - A_{i+1}}{S - A_i} \right) & \text{if } \alpha = a, \\ g(Z_{i+1} - Z_i) - \left(\frac{\tilde{c}_a^2 M}{S - A} \right) \frac{1}{\gamma} \ln(A_{i+1}/A_i) & \text{if } \alpha = w. \end{cases}$$

Les quantités surmontées de $\tilde{X}$ sont données par la formule générique :

$$\tilde{X} = \frac{X_i + X_{i+1}}{2}.$$

Elles sont obtenues en utilisant la définition d'un produit non-conservatif [81] (voir également Chapitre 2- Section 2.3.2.1)

En utilisant les relations (4.25)-(4.26), on pose :

$$U_{\alpha,i}^{n+1} = \begin{pmatrix} A_{\alpha,i}^{n+1} \\ Q_{\alpha,i}^{n+1} \end{pmatrix} := \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} f_{\alpha,i}^{n+1} d\xi \quad (4.31)$$

et en prenant les deux premiers moments de l'équation (4.29), on obtient le schéma volumes finis :

$$U_{\alpha,i}^{n+1} = U_{\alpha,i}^n + \frac{\Delta t}{h_i} \left(F_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^- - F_{\alpha,i-\frac{1}{2}}^+ \right) \quad (4.32)$$

où les flux numériques sont obtenus à partir de :

$$F_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^\pm \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \mathcal{M}_{\alpha,i+\frac{1}{2}}^\pm(\xi) d\xi \quad (4.33)$$

Dans la suite, on utilise la fonction $\chi(w) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}(w)$ et on a :

Théorème 4.2.3. *Sous la condition CFL*

$$\Delta t^n < \min_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{h_i}{\max_{\alpha} (|u_{\alpha,i}^n| + \sqrt{3} c_{\alpha,i}^n)} \right),$$

le schéma numérique préserve A_{α} positif si initialement A_{α}^0 l'est.

Remarque 4.2.5. *Le schéma numérique est bien équilibré si on applique la méthode développée au Chapitre 2- Section 2.3.5. Les propriétés de conservativité de la quantité d'eau ou d'air ainsi que les écoulements sur fond sec et assèchement sont encore valides pour chacune des couches.*

4.2.4 Tests numériques

Dans cette section, on illustre l'impact de la prise en compte de la couche d'air sur le comportement global de la surface libre. À cet effet, on considère une conduite horizontale de 100 m de long à section circulaire de 2 m de diamètre. Au temps $t = 0$, on suppose un état stationnaire à vitesse nulle, i.e. $Q_w = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ et de hauteur $y_w = 0.2 \text{ m}$.

On effectue deux tests en modifiant les valeurs de la densité de référence ρ_a , identique à l'amont et à l'aval. On prend successivement $\rho_a = 1.29349 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_a = 1.29349 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3$.

Dans les deux tests, on augmente la hauteur d'eau linéairement en 25 s de $y_w = 0.2 \text{ m}$ à $y_w = 0.4 \text{ m}$ (c.f. FIG. 4.7). À l'amont, on impose $\bar{\rho} = \rho_a$, donc $M_0 = \frac{\rho_a}{\rho_0}(S - A_0)$ où A_0 est la section d'eau à l'amont et l'indice 0 faisant référence aux états amont. Le débit d'air et d'eau à l'aval sont supposés nuls, i.e. $Q_{\alpha} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$ avec $\alpha = a$ et w .

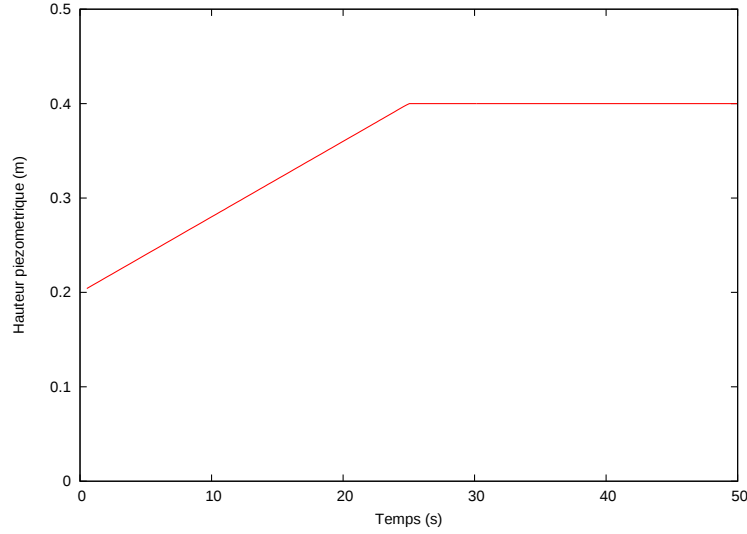
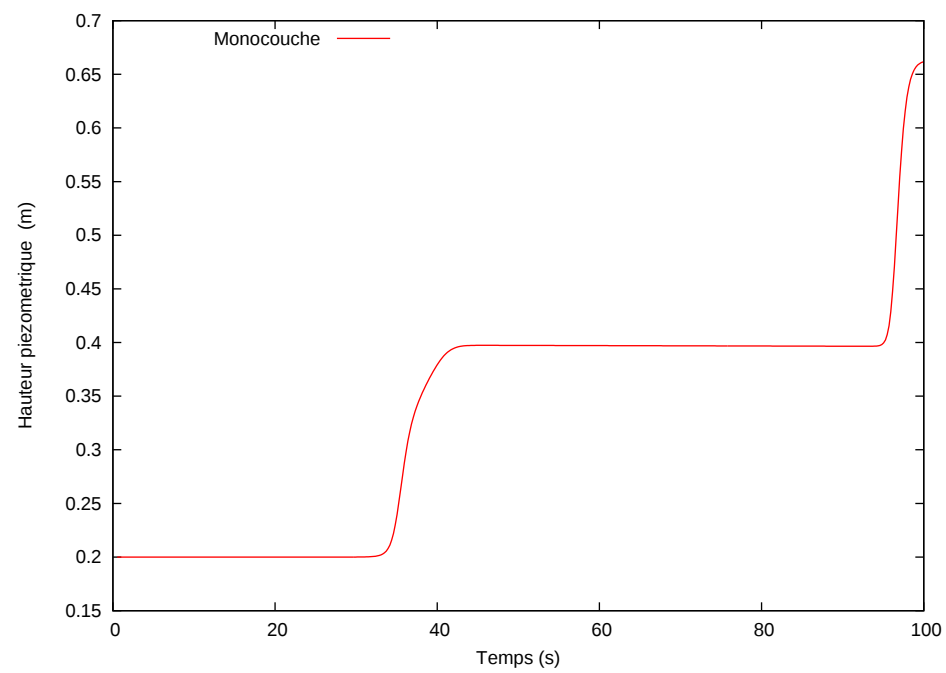


FIGURE 4.7 – Hauteur d'eau à l'amont

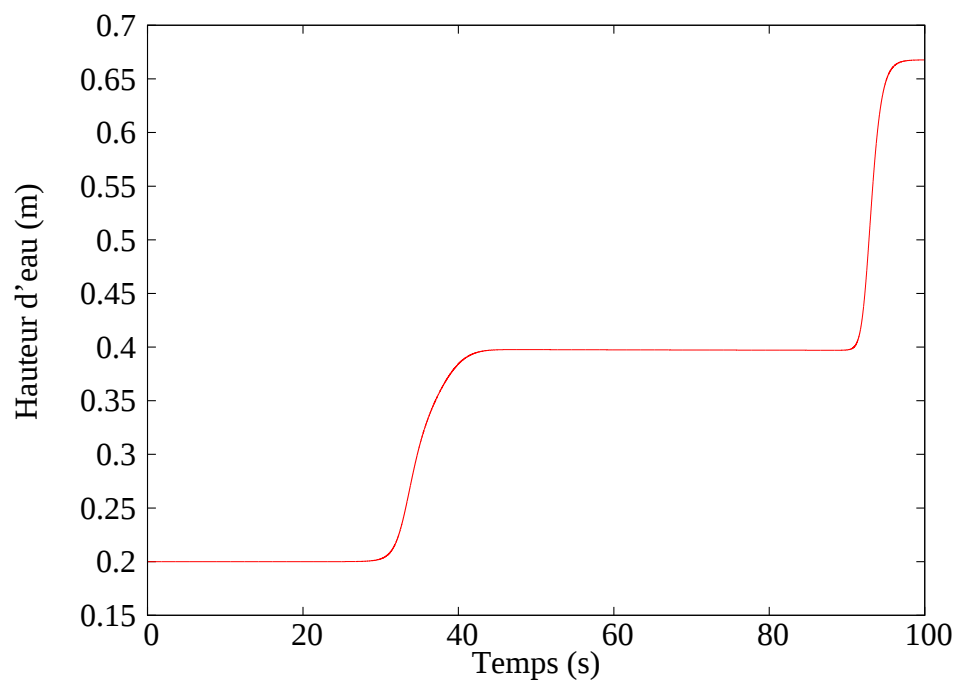
On trace alors le débit et la hauteur d'eau que l'on compare avec le modèle à surface libre du Chapitre 1- Section 1.2 (donc sans prise en compte de l'air). On trace également la pression de l'air et le débit d'air (pour mettre en évidence que les vitesses de l'air et d'eau sont généralement différentes). Tous les tracés sont effectués au point $x = 50 \text{ m}$ en fonction du temps. Pour ces deux tests, on a pris 100 points de maillage et une CFL de 0.8. On rappelle que la hauteur piézométrique, i.e. la hauteur d'eau, est définie par

$$piezo = z + h_w.$$

On observe aux figures 4.8 et 4.10 que l'influence de l'entraînement d'air est négligeable pour une faible densité ρ_a . Sur les figures 4.11, 4.12 et 4.13, avec $\rho_a = 1.29349 \text{ kg/m}^3$, l'effet de l'air est très important car il modifie considérablement la dynamique de l'écoulement. Initialement, l'air étant de densité importante et ne pouvant sortir de la conduite, est comprimé sous l'effet de l'élévation de la hauteur d'eau. Réciproquement, la hauteur d'eau ne pouvant augmenter librement au sein de la conduite, voit son débit s'accélérer. Bien que le modèle proposé soit un « modèle jouet », les résultats obtenus permettent de développer un modèle plus sophistiqué avec échange de masse.

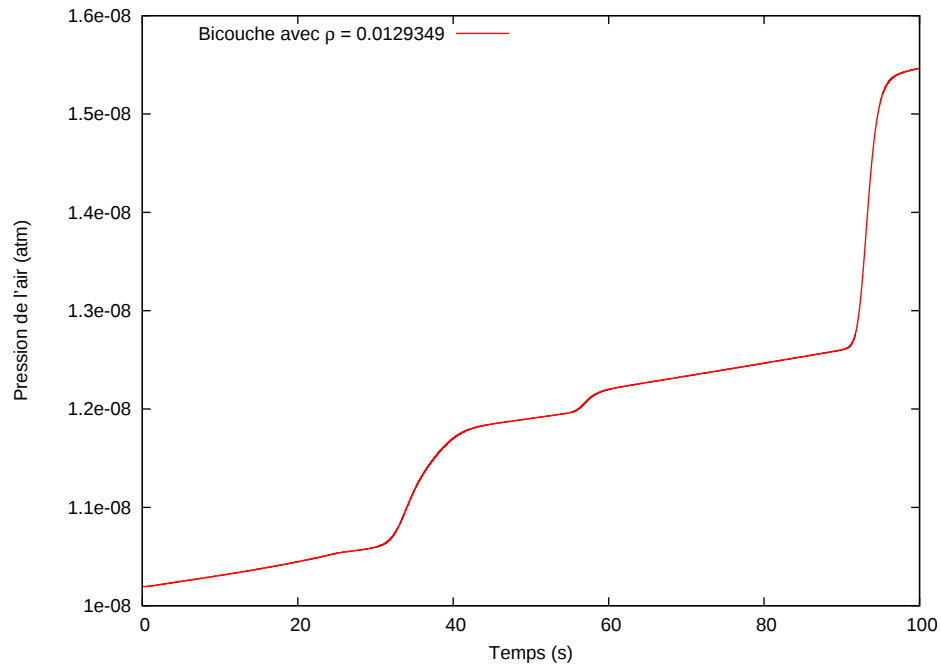


(a) Modèle monocouche

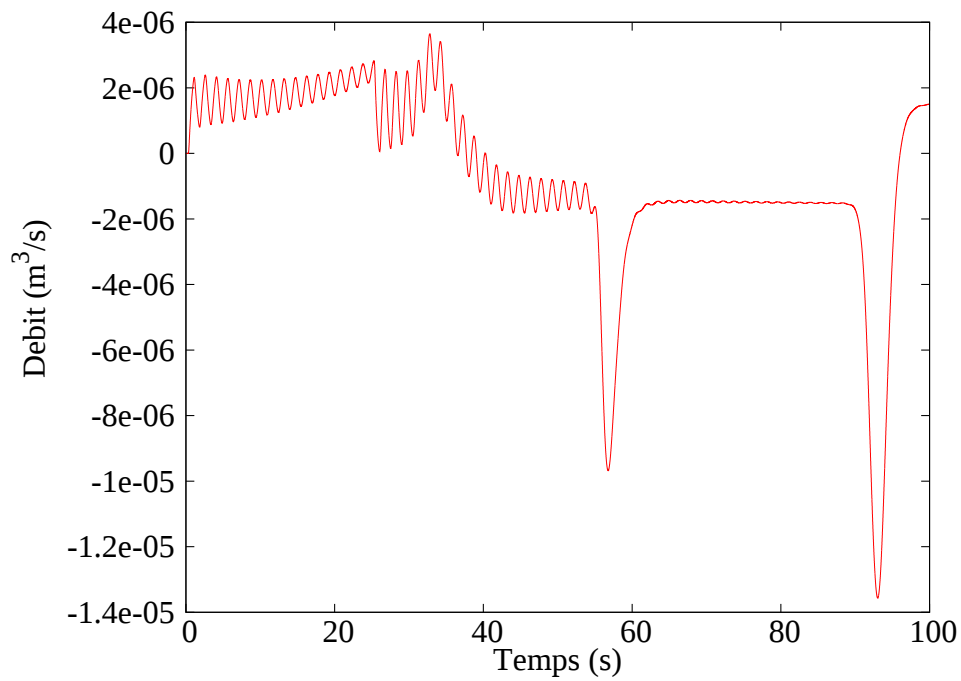


(b) Modèle bicouche

FIGURE 4.8 – Hauteur d'eau au point $x = 50 \text{ m}$ et $\rho_a = 1.29349 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3$

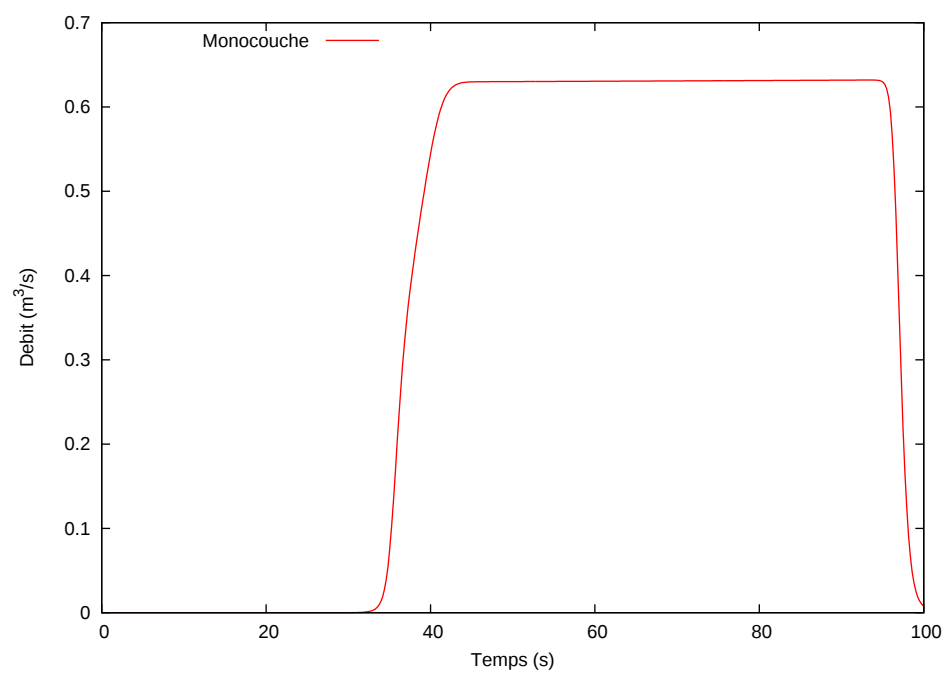


(a) Pression de l'air

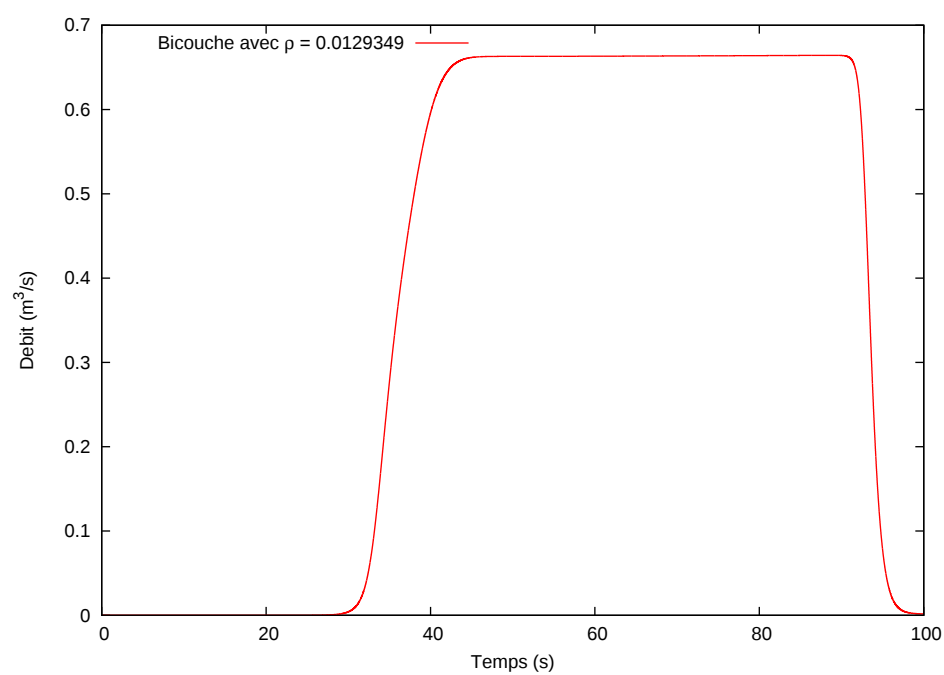


(b) Débit d'air

FIGURE 4.9 – Pression et débit d'air au point $x = 50$ m et $\rho_a = 1.29349 \cdot 10^{-2}$ kg/m³

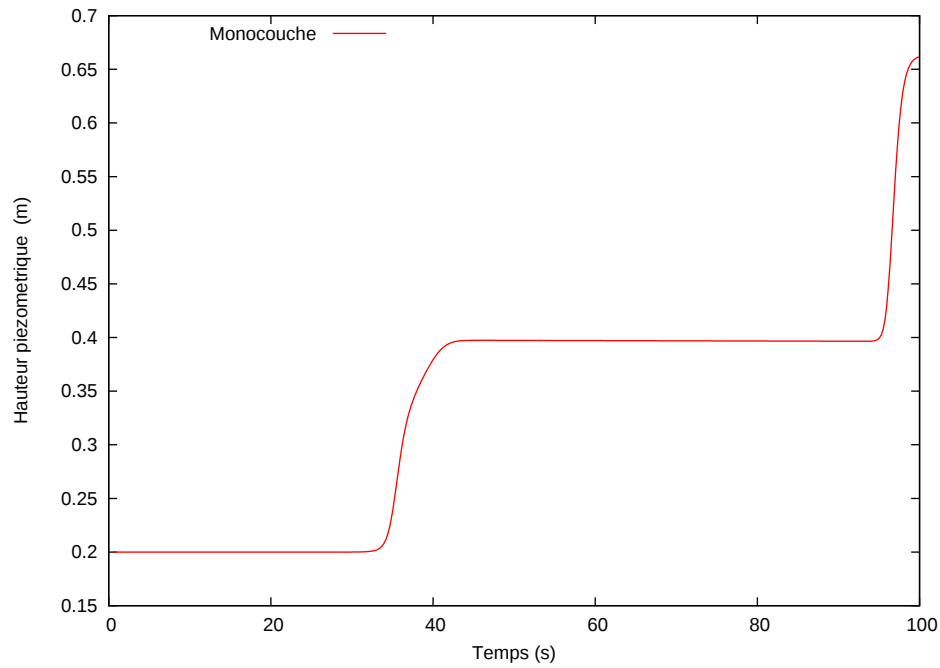


(a) Modèle monocouche

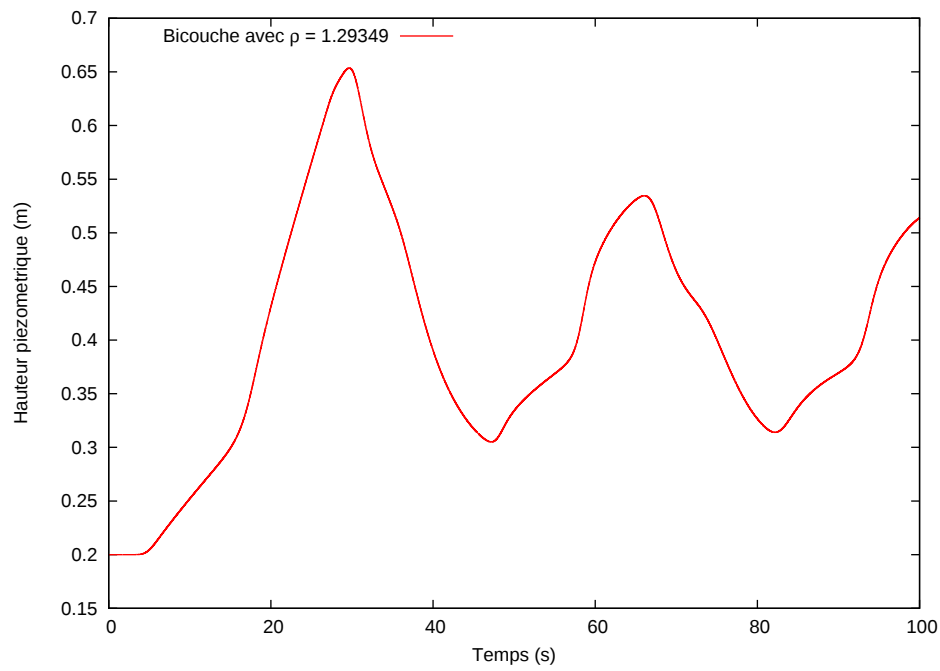


(b) Modèle bicouche

FIGURE 4.10 – Débit d'eau au point $x = 50 \text{ m}$ et $\rho_a = 1.29349 \cdot 10^{-2} \text{ kg}/\text{m}^3$

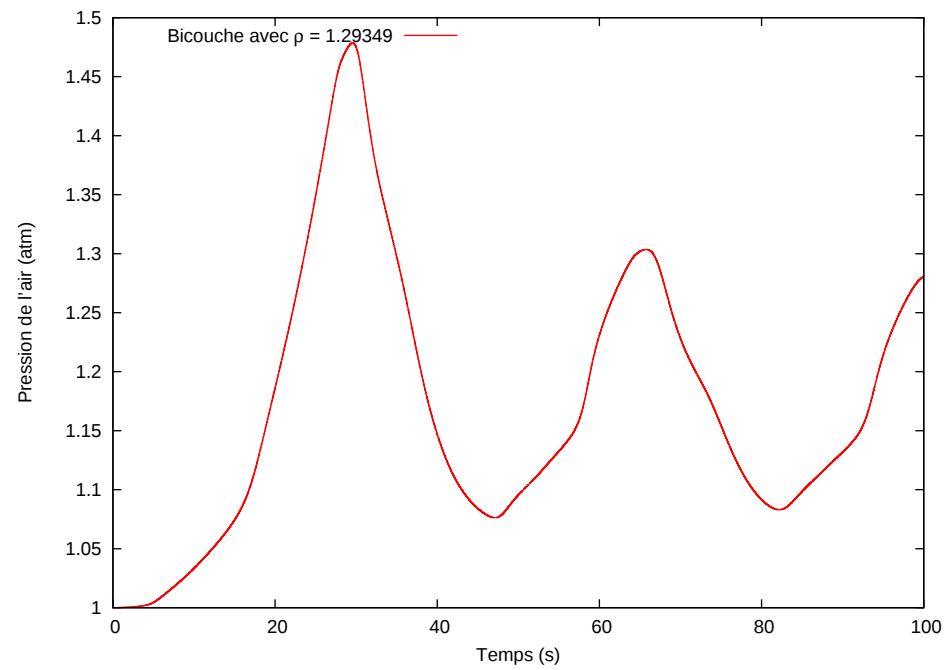


(a) Modèle monocouche

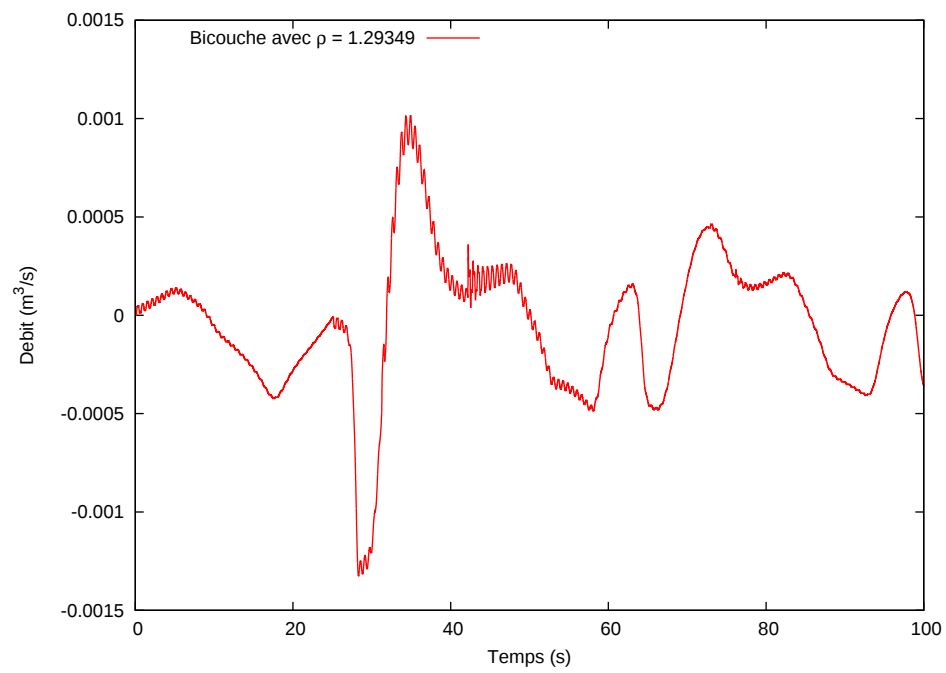


(b) Modèle bicouche

FIGURE 4.11 – Hauteur d'eau au point $x = 50 \text{ m}$ et $\rho_a = 1.29349 \text{ kg/m}^3$

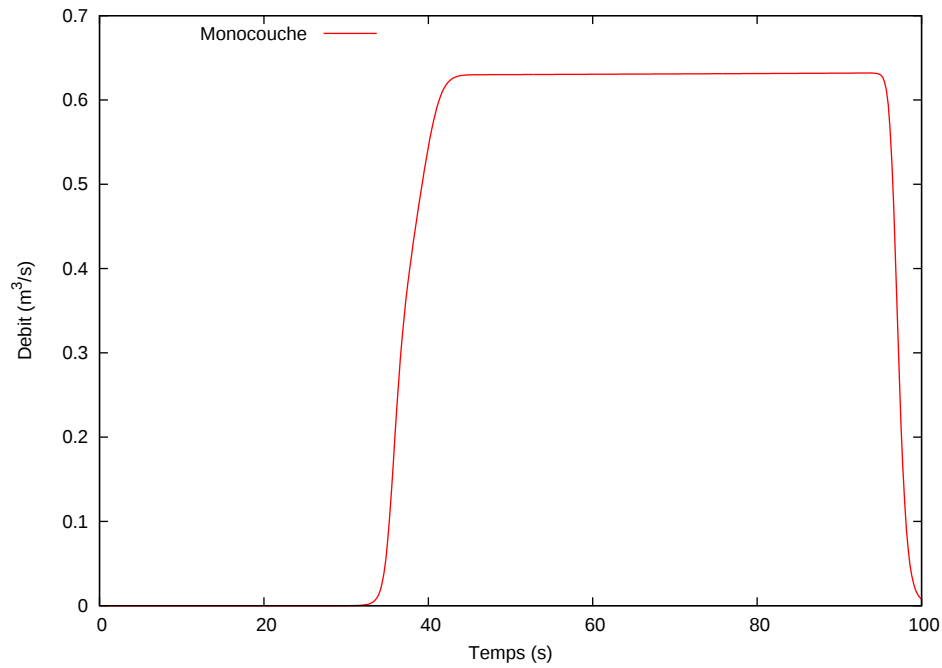


(a) Pression de l'air

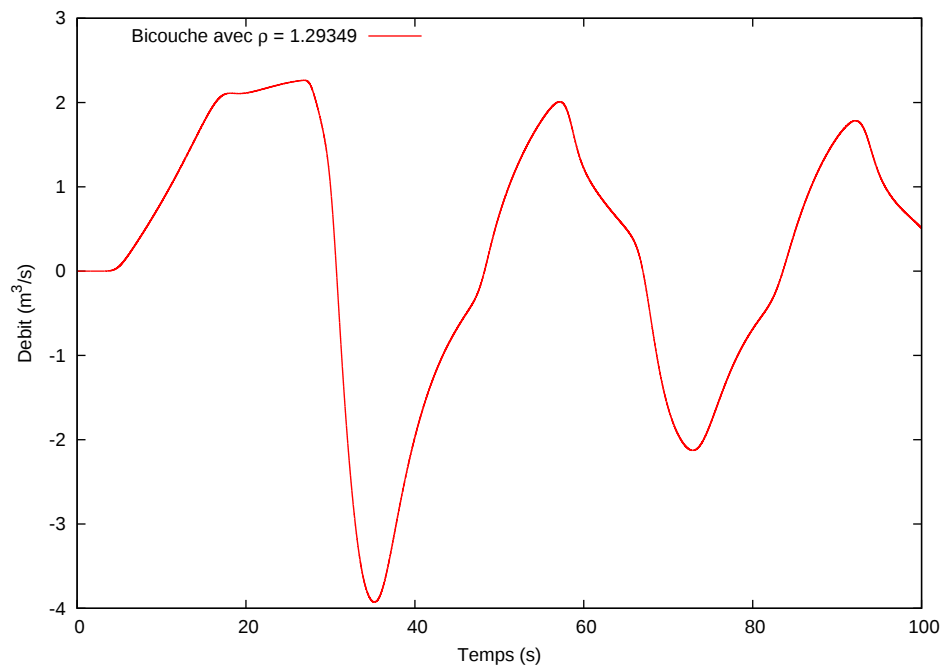


(b) Débit d'air

FIGURE 4.12 – Pression et débit d'air au point $x = 50 \text{ m}$ et $\rho_a = 1.29349 \text{ kg/m}^3$



(a) Modèle monocouche



(b) Modèle bicouche

FIGURE 4.13 – Débit d'eau au point $x = 50 \text{ m}$ et $\rho_a = 1.29349 \text{ kg/m}^3$

4.2.5 Perspectives

Bien que l'approche air/eau soit simpliste, c'est un modèle intéressant pour mettre en évidence les difficultés numériques issues d'un modèle à deux couches. En effet, le système à 4 équations étant, dans le plupart des régimes, non hyperbolique, dont les valeurs propres ne sont pas explicites, peut être résolu simplement à l'aide d'un solveur cinétique.

En vue de complexifier l'analyse pour la prise en compte de l'air dans un écoulement en conduite fermée, la prochaine étape est bien sûr, le couplage du modèle air-eau avec le modèle en charge précédemment établi au Chapitre 1. Dans un deuxième temps, on intégrera une phase gazeuse et liquide au sein de chaque couche au modèle air/eau, ainsi que dans le modèle monocouche en charge. Un terme de transfert de masse sera également additionné pour traiter les échanges entre couches. Cette approche semble être un bon compromis en vue de modéliser la cavitation avec prise en compte de l'air.

CHAPITRE 5

Modélisation de la sédimentation

Sommaire

5.1	Introduction	194
5.1.1	Les différents modes de transports de sédiments	194
5.1.2	Un modèle mathématique : les équations de Saint-Venant-Exner	195
5.2	Dérivation formelle du modèle de mélange	197
5.2.1	Présentation des modèles	197
5.2.2	Conditions aux limites	199
5.2.2.1	Conditions à la surface libre	200
5.2.2.2	Conditions au fond	200
5.2.3	Analyse dimensionnelle du modèle de base	202
5.2.4	Analyse asymptotique formelle	203
5.3	Dérivation formelle d'un modèle de transport de sédiments	205
5.3.1	Analyse asymptotique de type couche mince	205
5.3.2	Régime asymptotique	209
5.3.3	Intégration verticale du modèle de mélange	211
5.4	Un premier exemple : le flux de transport diffusif de J-D. Zabsonré	212
5.5	Un deuxième exemple : le flux de transport de Grass	215
5.6	Perspectives	215

*Cette partie est en cours de développement. Elle est effectuée en collaboration avec T. Ngom*⁸

8. Laboratoire d'Analyse Numérique et Informatique(LANI), Université Gaston Berger de Saint-Louis, Sénégal

NOTATIONS

- $b(t, x_1, x_2)$: cote du fond variable mesurée depuis la surface $x_3 = 0$
- $H(t, x_1, x_2)$: hauteur totale mesurée depuis la surface $x_3 = 0$
- $h(t, x_1, x_2)$: hauteur du fluide mesurée depuis la surface $x_3 = b(t, x_1, x_2)$
- $f(t, x)$: densité de fonction des particules avec $x = (x_1, x_2, x_3)$
- $v \in \mathbb{R}^3$: vitesse cinétique d'une particule
- a : rayon des particules
- k : constante de Boltzmann
- θ : fluctuation de la vitesse thermique
- T : température de suspension
- ρ_p : densité macroscopique de référence des particules
- ρ_s : densité macroscopique des particules
- ρ_w : densité du fluide
- $u \in \mathbb{R}^3$: vitesse du fluide
- μ : viscosité caractéristique du fluide
- $\operatorname{div}_x = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}$: divergence par rapport à x
- $\operatorname{div}_v = \sum_{i=1}^3 \partial_{v_i}$: divergence par rapport à v
- $\Delta_v = \sum_{i=1}^3 \partial_{v_i}^2$: laplacien par rapport à v

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à un problème de transport de sédiments, appelé *transport par charriage*.

L'étude de la sédimentation de particules dans un fluide en convection a un grand intérêt pour la compréhension de certains processus intervenant dans la formation et déformation du lit des cours d'eau. Par définition, le sédiment est un matériau issu de l'érosion, transporté et déposé par le cours d'eau. L'origine de ce dernier est endogène (i.e. à partir d'une production autochtone du milieu : cette production primaire engendre des débris de plantes aquatiques, microphytes et cadavres d'animaux) et/ou exogène (i.e par un apport de matières allochtones issues du ruissellement des fleuves, des effluents ou de l'atmosphère : cet apport peut être d'origine naturelle par l'érosion des sols, décomposition de la matière végétale), ou par des matières organiques, de nutriments ou de micro-polluants en raison des rejets agricoles, industriels et domestiques). Ainsi, les sédiments contaminés sont transportés et affectent la qualité de l'eau et sont sources de maladie. De plus, à long terme, le lit sous l'action de la sédimentation se déforme et peut engendrer des problèmes de navigabilité. En outre, il est donc d'un intérêt majeur d'avoir une meilleure connaissance des mécanismes pour développer un modèle mathématique de sédimentation de façon à pouvoir simuler et prédire afin d'éviter les problèmes liés à ce phénomène.

5.1.1 Les différents modes de transports de sédiments

À ce sujet, il existe de nombreux modèles mathématiques issus de lois empiriques de transport de sédiments. On distingue essentiellement deux modes de transport :

- par charriage,
- en suspension.

Le mode par charriage correspond au transport de sédiments en contact étroit avec le fond. Typiquement, une particule de sédiment roule. Dès lors que sa vitesse augmente et selon sa densité, elle commence à bondir en effectuant des sauts de plus en plus long et haut : c'est le mode de *transport transitoire*. Sa vitesse augmentant graduellement, la particule cesse d'interagir avec le fond : c'est le mode de transport en suspension. La combinaison des deux modes est appelée mode de *transport total*.

5.1.2 Un modèle mathématique : les équations de Saint-Venant-Exner

Sous l'action de la sédimentation, il existe une interaction dynamique entre l'écoulement et la morphologie du fond, par exemple, le lit d'une rivière. Le transport de sédiments modifie la dynamique de l'écoulement et donc le transport de sédiments lui-même. Les deux écoulements sont donc interdépendants. Il existe un modèle mathématique pour représenter cette « action-réaction » connu sous le nom de modèle de *Saint-Venant-Exner*. Ainsi, la partie hydrodynamique de l'écoulement est gouvernée par les équations de Saint-Venant usuelles et la partie morphodynamique est décrite par une équation de transport exprimant le déséquilibre entre le flux de sédiments entrant et sortant provoquant un changement de la cote du fond : on l'appelle l'*équation d'Exner*. En d'autres termes, on a d'une part les équations de Saint-Venant qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(q) = 0, \\ \partial_t q + \operatorname{div}\left(\frac{q \otimes q}{h}\right) + \nabla\left(g \frac{h^2}{2}\right) = -gh \nabla b \end{cases} \quad (5.1)$$

et d'autre part l'équation générale de transport de sédiments d'Exner donnée par :

$$\partial_t b + \xi \operatorname{div}(q_b(h, q)) = 0 \quad (5.2)$$

où h représente la hauteur d'eau, $q = hu$ est le débit d'eau, q_b est le débit de sédiments (ou le flux de transport solide) et $\xi = 1/(1 - \psi)$ est un coefficient de porosité associé à la couche de sédiments.

Modélisation du terme q_b .

En écartant l'étude de la granulométrie, le transport par charriage dépend de 5 paramètres adimensionnels :

- I : une intensité du transport par charriage, i.e. déplacement ou non des sédiments,
- a : diamètre des sédiments,
- τ : tension de frottement,
- p : profondeur relative,
- ρ : densité relative,

permettant ainsi de décrire le flux de transport solide sous la forme très générale suivante :

$$q_b = \Phi(I, a, \tau, p, \rho).$$

Il existe de nombreuses lois empiriques à ce sujet, obtenues par l'expérimentation en laboratoire ou réelle. Pour n'en citer que quelques unes, il y a

- la loi de Grass [58],
- la loi de Meyer-Peter-Müller [83].

On trouvera également d'autre lois dans [46].

Lorsque la force descendante due à la gravité est compensée par la force ascendante due à la turbulence, la particule est en suspension. Pour ce mode de transport, le flux de sédiments transportés en suspension dans une colonne d'eau est donné par la formule

$$q_b = \int_b^h c u dz$$

où c est la concentration de sédiments et u la vitesse du fluide en tout point z de la colonne d'eau. Dans cette description, on retiendra seulement le *nombre sans dimension de Rouse* qui fait intervenir le rapport de la vitesse verticale d'un sédiment et sa vitesse terminale (i.e la vitesse pour lequel un objet en chute libre atteint une accélération constante) qui permet de déterminer le profil de concentration des sédiments le long de la colonne d'eau. Dans le processus de dérivation du modèle de sédimentation proposé (c.f Section 5.2.4), ce nombre apparaîtra naturellement.

À l'heure actuelle, toutes les formules de modélisation du flux de transport de sédiments sont obtenues à partir de lois empiriques qui sont valide seulement pour une plage de données (dépendant des paramètres adimensionnels). Par conséquent, il est nécessaire de juxtaposer pour la modélisation du transport total, une loi pour le charriage et une autre pour le mode en suspension de sorte que les plages soient les mêmes et pour que la loi totale qui en découle soit physiquement valide.

Études mathématiques de modèles de transport.

Le modèle de Saint-Venant-Exner a été étudié numériquement, par exemple, dans [46, 94] et mathématiquement pour la version visqueuse (i.e avec les équations de Saint-Venant visqueuses à la place des équations (5.1)) dans [103, 110] en utilisant des estimations a priori comme dans [86, 75, 24, 25, 31, 82].

Plan du chapitre

On présente une première dérivation formelle des équations de Saint-Venant-Exner obtenus à partir d'un modèle de type mélange (en vue de prendre en compte, ultérieurement, le mode de transport de sédiments total). Par abus de langage, dans la suite, on l'appelle modèle de mélange.

Les équations obtenues concernant la partie hydrodynamique de l'écoulement sont de type Saint-Venant où la loi de pression classique $g\frac{h^2}{2}$ est remplacée par $g\frac{h^2}{3}$. Cette nouvelle loi de pression est issue d'un modèle de mélange obtenu via un couplage d'équations de Vlasov avec un terme de gravité (pour la partie sédimentation) et de Navier-Stokes compressibles anisotropes (pour la partie fluide). À cet égard, on suppose que les sédiments sont sphériques de taille uniforme, de dimension petite par rapport à la hauteur du domaine. Par suite, en jouant sur des paramètres de vitesses verticales fluide-sédiments, on dérive dans un premier temps la limite hydrodynamique de l'équation de Vlasov. Ensuite, en prenant les deux premiers moments de cette limite, on aboutit à des équations d'Euler compressibles que l'on ajoute à celle de Navier-Stokes pour obtenir lesdites *équations de mélange* (c.f. Section 5.2.4).

Ensuite, en vue d'obtenir un modèle unidirectionnel, on effectue une deuxième analyse asymptotique de type couche mince (comme celle présentée dans [54, 79] et au Chapitre 1 ou 3). C'est l'objet de la Section 5.3. Puis, par une technique de moyennisation suivant la verticale, on obtient le modèle de sédimentation de type Saint-Venant-Exner.

Enfin, on termine par quelques résultats de stabilités de solutions faibles sur le modèle obtenu aux Sections 5.4 et 5.5.

5.2 Dérivation formelle du modèle de mélange

Dans cette section, on dérive formellement un système de type Navier-Stokes compressible afin de modéliser l'effet des sédiments dans un fluide qu'on appelle modèle de mélange.

Le système est obtenu en additionnant les deux premiers moments de la limite hydrodynamique de l'équation de Vlasov aux équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes de pression barotrope non-homogène. Cette loi s'écrit sous la forme $k(t, x)\rho^\gamma$ et elle est particulièrement bien adaptée pour obtenir des équations de type Saint-Venant.

Plus précisément, la dynamique des sédiments est décrite par l'équation de Vlasov usuelle à laquelle on ajoute un terme de gravité tandis que l'écoulement fluide est gouvernée par des équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes (celles introduites pour les équations primitives compressibles simplifiées, voir Chapitre 3). Pour traduire l'interdépendance, on ajoute un terme source correspondant à la force de trainée de Stokes.

En introduisant un nombre sans dimension, qui est le rapport de temps de relaxation par un temps caractéristique, supposé petit, on obtient formellement au premier ordre une Gaussienne. Par conséquent, en prenant les deux premiers moments de la limite hydrodynamique, on obtient des équations d'Euler dont le terme source est de signe opposé à celui de la force de trainée de Stokes : c'est le principe d'action-réaction. Additionnant ces équations, on dérive le modèle de mélange. La première partie de cette section est basée sur les travaux de Goudon *et al.* [57].

5.2.1 Présentation des modèles

On suppose que les particules sont sphériques, de même diamètre et soumises à la gravité. L'évolution des particules immergées dans un fluide est décrite par une densité de fonction $f(t, x, v) \geq 0$, où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ est la position de la particule, $v \in \mathbb{R}^3$ sa vitesse cinétique au temps t , satisfaisant l'équation de Vlasov (5.3) avec Ω_0 défini comme suit :

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in [0, \mathfrak{L}_1] \times [0, \mathfrak{L}_2] \text{ et } 0 \leq x_3 \leq b(t, x_1, x_2)\}.$$

En outre, Ω_0 est composé d'une région de mélange fluide-particules $\Omega(t)$,

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in [0, \mathfrak{L}_1] \times [0, \mathfrak{L}_2] \text{ et } b(t, x_1, x_2) \leq x_3 \leq H(t, x_1, x_2)\},$$

et d'une couche de sédiments (c.f. FIG. 5.1)

$$\{x \in \mathbb{R}^3; (x_1, x_2) \in [0, \mathfrak{L}_1] \times [0, \mathfrak{L}_2] \text{ et } 0 \leq x_3 \leq b(t, x_1, x_2)\}$$

où H est la hauteur totale (mesurée à partir de la surface $x_3 = 0$), h est la hauteur du fluide (distance séparant la cote du fond à la surface libre) et b est la hauteur du fond variable engendrée par le dépôt de sédiments (mesurée également à partir de la surface $x_3 = 0$).

L'équation de Vlasov avec terme de gravité est :

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x(vf) + \operatorname{div}_v((F + \vec{g})f) = r\Delta_v f. \quad (5.3)$$

Le vecteur gravité $\vec{g}$ est $\vec{g} = (0, 0, -g)^t$ et il est souvent noté $-g\vec{k}$ avec $\vec{k} = (0, 0, 1)^t$. Le terme F est la force de portance, communément appelée *force de trainée de Stokes*, qui s'oppose à la gravité. Elle est donnée par :

$$F = \frac{6\pi\mu a}{M}(u - v). \quad (5.4)$$

où a est le rayon (supposé constant) du sédiment, M est la masse des particules donnée par $M = \rho_p \frac{4}{3}\pi a^3$ avec ρ_p la densité massique de la particule.

Le terme u est le champ de vitesse du fluide et μ une viscosité caractéristique du fluide, supposée constante.

Le terme de diffusion $r\Delta_v f$ décrit les effets browniens du mouvement des particules où $r > 0$ est la vitesse de diffusion exprimée par la formule d'Einstein :

$$r = \frac{kT}{M} \frac{6\pi\mu a}{M} = \frac{kT}{M} \frac{9\mu}{2a^2\rho_p} \quad (5.5)$$

où k est la constante de Boltzmann et $T > 0$ est la température de suspension, supposée constante.

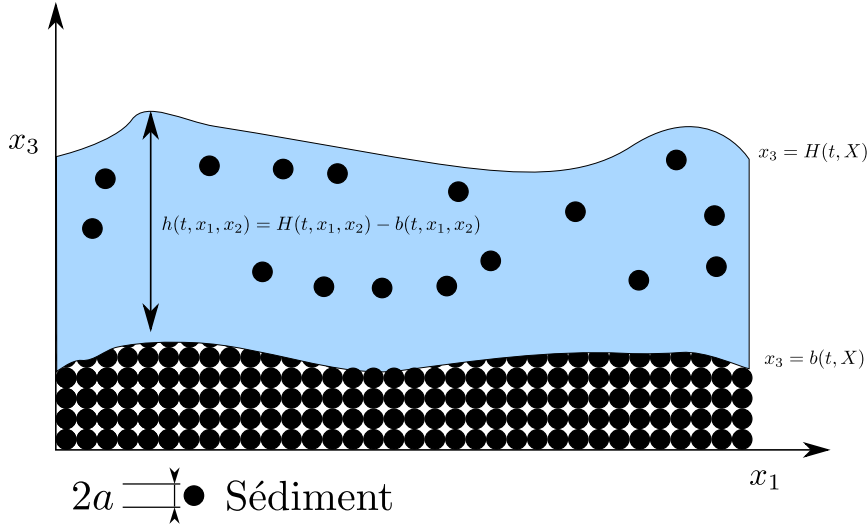


FIGURE 5.1 – Domaine fluide-sédiments $\Omega(t)$

L'évolution du fluide est décrite par sa vitesse $u(t, x) = (u_1, u_2, u_3)(t, x)$ et sa densité $\rho_w(t, x)$ qui satisfont les équations de Navier-Stokes compressibles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w u) = 0, & (5.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_w u) + \operatorname{div}(\rho_w u \otimes u) = \operatorname{div} \sigma(\rho_w, u) + \mathfrak{F}, & (5.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = p(t, x) & (5.8) \end{cases}$$

où $\sigma(\rho_w, u)$ est le tenseur des contraintes totales :

$$-pI_3 + 2\Sigma(\rho_w).D(u) + \lambda(\rho_w)\operatorname{div}(u)I_3$$

avec I_3 la matrice identité. Le terme $\Sigma(\rho_w)$ est la matrice anisotrope :

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\rho_w) & \mu_1(\rho_w) & \mu_2(\rho_w) \\ \mu_1(\rho_w) & \mu_1(\rho_w) & \mu_2(\rho_w) \\ \mu_3(\rho_w) & \mu_3(\rho_w) & \mu_3(\rho_w) \end{pmatrix}$$

avec $\mu_i \neq \mu_j$ pour $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, 3$.

Remarque 5.2.1. Comme dans le Chapitre 3, un tel tenseur permet de manipuler l'ordre de grandeur des viscosités afin de dériver un modèle proche des équations primitives compressibles.

Le tenseur visqueux $\Sigma(\rho_w).D(u)$ est :

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\rho_w)\partial_{x_1}u_1 & \frac{\mu_1(\rho_w)}{2}(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2) & \frac{\mu_2(\rho_w)}{2}(\partial_{x_3}u_1 + \partial_{x_1}u_3) \\ \frac{\mu_1(\rho_w)}{2}(\partial_{x_1}u_2 + \partial_{x_2}u_1) & \mu_1(\rho_w)\partial_{x_2}u_2 & \frac{\mu_2(\rho_w)}{2}(\partial_{x_3}u_2 + \partial_{x_2}u_3) \\ \frac{\mu_3(\rho_w)}{2}(\partial_{x_1}u_3 + \partial_{x_3}u_1) & \frac{\mu_3(\rho_w)}{2}(\partial_{x_2}u_3 + \partial_{x_3}u_2) & \mu_3(\rho_w)\partial_{x_3}u_3 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

On propose la loi de pression barotrope non-homogène (comme dans [30]) qui s'écrit :

$$p(t, x) = k(t, x_1, x_2)\rho(t, x)^2 \quad \text{avec} \quad k(t, x_1, x_2) = \frac{gh(t, x_1, x_2)}{4\rho_f} \quad (5.10)$$

où $\rho := \rho_w + \rho_s$ est une densité de mélange avec ρ_s la densité macroscopique donnée par

$$\rho_s = \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv \quad (5.11)$$

et ρ_f une densité caractéristique du fluide. Ainsi, on impose un premier couplage entre sédiments et fluide via la pression.

Un deuxième couplage a lieu au niveau des forces extérieures appliquées au fluide $\mathfrak{F}$. L'ensemble de ces forces est donné par :

$$\mathfrak{F} = - \int_{\mathbb{R}^3} F f \, dv + \rho_w \vec{g} = \frac{9\mu}{2a^2\rho_p} \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) f \, dv + \rho_w \vec{g} \quad (5.12)$$

où le terme $-\int_{\mathbb{R}^3} F f \, dv$ permet de prendre en compte l'effet des mouvements des particules sur le fluide.

Finalement, les équations pour le modèle de l'interaction fluide-sédiments proposé s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t f + \operatorname{div}_x(vf) + \operatorname{div}_v \left(\left(\frac{6\pi\mu a}{M}(u - v) + \vec{g} \right) f \right) = \frac{kT}{M} \frac{9\mu}{2a^2\rho_p} \Delta_v f, \\ \partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w u) = 0, \\ \partial_t(\rho_w u) + \operatorname{div}(\rho_w u \otimes u) + \nabla p - 2\operatorname{div}(\Sigma.D(u)) = \nabla(\lambda(\rho_w)\operatorname{div}(u)) \\ \quad + \frac{9\mu}{2a^2\rho_p} \int_{\mathbb{R}^3} (v - u) f \, dv - g\rho_w \vec{k} \end{cases} \quad (5.13)$$

où la pression p est donnée par (5.10). À ce système (5.13), on adjoint les conditions aux limites données dans la section suivante.

5.2.2 Conditions aux limites

On présente dans cette section les conditions aux limites qu'on adjoint au système (5.13). Pour les conditions associées aux équations de Navier-Stokes compressibles anisotropes, on écrit la condition cinématique à la surface libre et la condition de continuité du tenseur des contraintes. Quant aux conditions au fond, on impose une loi de glissement et la continuité de la vitesse à l'interface entre la région fluide et la couche de sédiments.

Actuellement, on n'a pas encore établi la « bonne » condition aux limites cinétiques pour l'équation de Vlasov afin d'aboutir à une équation de type Exner. Cependant, on impose la continuité entre la vitesse de déplacement $\mathbf{u}_b$ du fond mobile et la vitesse du fluide u comme suit :

$$u \cdot n_b = \mathbf{u}_b \cdot n_b, \text{ en } x_3 = b(t, x_1, x_2).$$

On entend par la « bonne » condition, une équation tel que $\mathbf{u}_b$ a pour expression :

$$\mathbf{u}_b = \frac{\int_{\partial\Omega_b^-} v f dv + \int_{\partial\Omega_b^+} v f dv}{\int_{\partial\Omega_b^-} f dv + \int_{\partial\Omega_b^+} f dv}.$$

Ici, $\partial\Omega_b^+$ est la partie du fond correspondant aux particules qui se déposent et $\partial\Omega_b^-$ est celle où ces dernières se déplacent (i.e roulent ou décollent sous l'action du fluide).

Classiquement, une condition de réflexion de Maxwell est imposée. Elle exprime l'équilibre entre les particules entrantes et sortantes. Elle est définie par un opérateur locale de réflexion et de diffusion. Dans [80], avec ce type de condition, les auteurs dérivent le système de Stokes-Fourier à partir de l'équation de Boltzmann. Cet article fournit peut être un moyen d'exprimer une telle condition. Le travail est en cours.

5.2.2.1 Conditions à la surface libre

En supposant que la viscosité de l'air est négligeable, la condition de continuité est donnée par :

$$\sigma(u)n_s = (\beta \kappa(t, x) - p_0) n_s \text{ en } x_3 = H(t, x).$$

Le vecteur n_s est la normale unitaire sortante à la surface libre définie par :

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{x_1, x_2} H|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} H \\ -\partial_{x_2} H \\ 1 \end{pmatrix},$$

où β est un coefficient de capillarité, κ est la courbure moyenne de la surface libre et p_0 la pression atmosphérique à la surface libre. Ainsi, la condition à la surface libre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} (p + \beta\kappa - p_0) \nabla_{x_1, x_2} H - \mu_1 D_{x_1, x_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \nabla_{x_1, x_2} H \\ \quad + \mu_2 \left(\partial_{x_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1, x_2} u_3 \right) - \lambda \operatorname{div}(u) \nabla_{x_1, x_2} H = 0, \\ -p - \alpha\kappa + p_0 - \mu_3 \left(\partial_{x_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1, x_2} u_3 \right) \cdot \nabla_{x_1, x_2} H \\ \quad + 2\mu_3 \partial_{x_3} u_3 + \lambda \operatorname{div}(u) = 0. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

5.2.2.2 Conditions au fond

Au fond, on impose une loi de glissement de la forme :

$$((\sigma(u)n_b) \cdot \tau_b) \cdot \tau_b = \mathfrak{K}(u) \text{ en } x_3 = b(t, x_1, x_2)$$

où la friction $\mathfrak{K}(u) = (\mathfrak{K}_1(u), \mathfrak{K}_2(u), \mathfrak{K}_3(u))^t$ peut être laminaire et/ou turbulente (c.f. [79]). Le vecteur normal unitaire sortant s'exprime par :

$$n_b = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{x_1, x_2} H|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} b \\ -\partial_{x_2} b \\ 1 \end{pmatrix}$$

et τ_b est un vecteur unitaire du plan tangent à la surface $x_3 = b(t, x_1, x_2)$. Cette condition est réécrite :

$$\sigma(u)n_b - (\sigma(u)n_b \cdot n_b) n_b = \mathfrak{K}(u) \text{ en } x_3 = b(t, x_1, x_2).$$

Ainsi, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu_1 \left((1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2) I_2 - \nabla_{x_1, x_2} b \nabla_{x_1, x_2} b^t \right) D_{x_1, x_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \nabla_{x_1, x_2} b \\ + \mu_2 \left((1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2) I_2 - \nabla_{x_1, x_2} b \nabla_{x_1, x_2} b^t \right) \left(\partial_{x_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1, x_2} u_3 \right) \\ - \mu_3 \left(\left(\partial_{x_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1, x_2} u_3 \right) \cdot \nabla_{x_1, x_2} b \right) \nabla_{x_1, x_2} b + 2\mu_3 \partial_{x_3} u_3 \nabla_{x_1, x_2} b \\ = \left(1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2 \right)^{3/2} \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ -\mu_3 |\nabla_{x_1, x_2} b|^2 \left(\partial_{x_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1, x_2} u_3 \right) \cdot \nabla_{x_1, x_2} b + 2\mu_3 |\nabla_{x_1, x_2} b|^2 \partial_{x_3} u_3 \\ + \mu_2 \left(\partial_{x_3} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nabla_{x_1, x_2} u_3 \right) \cdot \nabla_{x_1, x_2} b \\ - \mu_1 \left(D_{x_1, x_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \nabla_{x_1, x_2} b \right) \cdot \nabla_{x_1, x_2} b \\ = \left(1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2 \right)^{3/2} \mathfrak{K}_3(u). \end{array} \right. \quad (5.15)$$

En écrivant la condition de continuité des vitesses à l'interface,

$$u \cdot n_b = u_b \cdot n_b,$$

et en introduisant une quantité S , on pose

$$S = \partial_t b + \sqrt{1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2} u \cdot n_b \quad \text{en } x_3 = b(t, x_1, x_2). \quad (5.16)$$

Le terme $S - \sqrt{1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2} u \cdot n_b$ traduit la dynamique de la variation du fond b .

Remarque 5.2.2. *Il n'y a aucune raison pour qu'un sédiment au fond soit transporté à la vitesse du fluide telle une condition cinématique à la surface libre. C'est pourquoi on introduit le terme S .*

Remarque 5.2.3. *Comme nous allons le voir aux Sections 5.4 et 5.5, en posant $S = 0$ et en définissant $-\sqrt{1 + |\nabla_{x_1, x_2} b|^2} u \cdot n_b$ par une loi empirique on obtient des modèles de sédimentation usuelles. Néanmoins, comme on l'a souligné en début de cette section et via la remarque précédente, on pense que si on peut définir une condition aux limites pour l'équation de Vlasov, alors on pourrait définir mathématiquement le terme S pour pouvoir ensuite le comparer avec une des nombreuses lois empiriques existants à ce sujet (Voir l'introduction du chapitre).*

5.2.3 Analyse dimensionnelle du modèle de base

Suivant Goudon *et al.* [57], on introduit un petit paramètre $\varepsilon = \frac{\tau}{\mathfrak{T}}$ où τ est le temps de relaxation que l'on compare à un temps caractéristique $\mathfrak{T}$. Le temps de relaxation est défini par :

$$\tau = \frac{M}{6\pi\mu a} = \frac{2a^2\rho_p}{9\mu}. \quad (5.17)$$

Il correspond également au *temps terminal de Stokes*, i.e. le temps à partir duquel une particule en chute atteint une accélération constante. On appelle d'ailleurs cette vitesse, *la vitesse terminale de Stokes*.

On introduit aussi une longueur caractéristique $\mathfrak{L}$ (correspondant à la hauteur du domaine) et une vitesse caractéristique du fluide $\mathfrak{U}$ de sorte que $\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}$. On définit une fluctuation de la vitesse thermique

$$\sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{kT}{M}}$$

que l'on compare à $\mathfrak{U}$.

Enfin, on pose

$$\tilde{t} = \frac{t}{\mathfrak{T}}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\mathfrak{L}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\sqrt{\theta}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\sqrt{\theta}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_f \theta}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_f},$$

$$\tilde{\mu}_i(\tilde{\rho}) = \frac{\mu_i(\rho)}{\mu}, \quad \tilde{\lambda}(\tilde{\rho}) = \frac{\lambda(\rho)}{\mu} \quad \text{and} \quad \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \rho_f \sqrt{\theta}^3 f(\mathfrak{T}\tilde{t}, \mathfrak{L}\tilde{x}, \sqrt{\theta}\tilde{v}).$$

Ainsi, le système (5.13) s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathfrak{T}} \partial_{\tilde{t}} \tilde{f} + \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}} \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f} + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \operatorname{div}_{\tilde{v}} \left(\frac{\sqrt{\theta}}{\tau} (\tilde{u} - \tilde{v}) \tilde{f} - g \tilde{f} \vec{k} \right) = \frac{1}{\tau} \Delta_{\tilde{v}} \tilde{f}, \end{array} \right. \quad (5.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathfrak{T}} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho}_w + \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}} \operatorname{div}(\tilde{\rho}_w \tilde{u}) = 0, \end{array} \right. \quad (5.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\theta}\rho_f}{\mathfrak{T}} \partial_{\tilde{t}}(\tilde{\rho}_w \tilde{u}) + \frac{\theta\rho_f}{\mathfrak{L}} \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{\rho}_w \tilde{u} \otimes \tilde{u}) - \\ \frac{\sqrt{\theta}\mu}{\mathfrak{L}^2} \left(2 \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{\Sigma} \cdot (D(\tilde{u}))) + \nabla_{\tilde{x}}(\tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{u})) \right) + \frac{\rho_f \theta}{\mathfrak{L}} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{p} \\ = \frac{9\mu}{2a^2 \rho_p} \rho_f \sqrt{\theta} \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{v} - \tilde{u}) \tilde{f} d\tilde{v} - \rho_f g \tilde{\rho}_w \vec{k}. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

On note les nombres sans dimension B , C , E , F comme suit :

$$B = \frac{\sqrt{\theta}}{\mathfrak{U}}, \quad C = \frac{\mathfrak{T}}{\tau}, \quad F = \frac{g\mathfrak{T}}{\sqrt{\theta}}, \quad E = \frac{2}{9} \left(\frac{a}{\mathfrak{L}} \right)^2 \frac{\rho_p}{\rho_f} C. \quad (5.21)$$

Ainsi, en multipliant les équations (5.18) et (5.19) par $\mathfrak{T}$, l'équation (5.20) par $\frac{\mathfrak{T}}{\rho_f \sqrt{\theta}}$, en utilisant la définition de τ (5.17) et celles des nombres sans dimension ci-dessus (5.21), et en omettant le

tilde, le système précédent s'exprime sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + B \operatorname{div}_x(vf) + C \operatorname{div}_v((u-v)f - \nabla_v f) = F \operatorname{div}_v(\vec{k}f), \\ \partial_t \rho_w + B \operatorname{div}(\rho_w u) = 0, \\ \partial_t(\rho_w u) + \operatorname{div}(\rho_w u \otimes u) + B \nabla p - 2E \operatorname{div}(\Sigma.D(u)) = E \nabla(\lambda \operatorname{div}(u)) \\ \quad + C \int_{\mathbb{R}^3} (v-u)f dv - \rho_w F \vec{k}. \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Remarque 5.2.4. Les conditions aux limites ne sont pas écrites car elles sont invariantes par ce changement d'échelle.

5.2.4 Analyse asymptotique formelle

On se place dans le régime asymptotique suivant :

$$\frac{\rho_p}{\rho_f} = O(1), \quad B = O(1), \quad C = \frac{1}{\varepsilon}, \quad F = O(1), \quad E = O(1). \quad (5.23)$$

Il signifie :

- l'hypothèse $\frac{\rho_p}{\rho_f} = O(1)$ traduit le fait que les particules sont de masse non négligeables.

Pour aller plus loin dans l'analyse, en introduisant le nombre de Rouse $\mathcal{R} = \frac{\omega_S}{v_{up}}$ avec w_S la vitesse terminale de Stokes,

$$w_S = (\rho_p - \rho_f) \frac{2ga^2}{9\mu} = \text{cte} \frac{2ga^2}{9\mu},$$

et v_{up} une vitesse caractéristique verticale associée à v_3 (vitesse verticale des sédiments), alors on retrouve les trois types de régime en fonction des paramètres énoncés à l'introduction (c.f. Section 5.1) :

- si $w_S > v_3$ alors le transport est en mode charriage (les particules sont transportées le long du fond),
- si $w_S \approx v_3$ alors le transport est en mode transitoire (les particules du fond commencent à bondir de plus en plus loin et haut),
- si $w_S < v_3$ les particules sont en suspension.
- $B = O(1)$ signifie que la vitesse caractéristiques $\mathfrak{U}$ du fluide et la fluctuation de la vitesse thermique $\sqrt{\theta}$ sont de même ordre par rapport à ε .
- Le terme C est le nombre de Knudsen et $C = 1/\varepsilon$ signifie que le temps d'interaction à l'échelle microscopique est très rapide.
- Le terme $1/F$ est le nombre de Froude. En effet, puisque $\sqrt{\theta} \approx \mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{T}}$, on a

$$F = \frac{g\mathfrak{T}}{\mathfrak{L}} = \frac{g\mathfrak{L}}{\mathfrak{U}^2}.$$

- Compte tenu de ce qui précède, $E = O(1)$ signifie que le diamètre des sédiments est petit par rapport à la hauteur du domaine.

En écrivant le développement asymptotique de f , u , p et ρ par rapport à ε ,

$$f = f^0 + \varepsilon f^1 + O(\varepsilon^2), u = u^0 + \varepsilon u^1 + O(\varepsilon^2), p = p^0 + \varepsilon p^1 + O(\varepsilon^2), \rho_w = \rho_w^0 + \varepsilon \rho^1 + O(\varepsilon^2), \quad (5.24)$$

puis, en les injectant dans le système (5.22), on en déduit par identification suivant les puissances de ε :

à l'ordre $1/\varepsilon$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}_v((u^0 - v)f^0 - \nabla_v f^0) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3} (v - u^0)f^0 dv = 0 \end{cases} \quad (5.25a)$$

$$\quad (5.25b)$$

à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \partial_t f^0 + Bv \nabla_x f^0 + \operatorname{div}_v((u^0 - v)f^1 - \nabla_v f^1) + \operatorname{div}_v(u^1 f^0) = F \nabla_v f^0, \\ \partial_t \rho_w^0 + B \operatorname{div}(\rho_w^0 u^0) = 0, \\ \partial_t(\rho_w^0 u^0) + B \operatorname{div}_x(\rho_w^0 u^0 \otimes u^0) + B \nabla_x p^0 = 2E \left(\operatorname{div}(\Sigma^0 \cdot D(u^0)) \right. \\ \left. + \nabla(\lambda(\rho_w^0) \operatorname{div}(u^0)) \right) + \int_{\mathbb{R}^3} (v - u^0)f^1 dv - \int_{\mathbb{R}^3} u^1 f^0 dv - F \rho \vec{k}. \end{cases} \quad (5.26)$$

En notant la densité macroscopique de particules ρ_s et sa vitesse macroscopique V ,

$$\begin{pmatrix} \rho_s \\ \rho_s V \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} f dv \quad (5.27)$$

et en écrivant leurs développements asymptotiques suivant ε , à l'ordre principal, on a :

$$\begin{pmatrix} \rho_s^0 \\ \rho_s^0 V^0 \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} f^0 dv.$$

D'autre part, via l'équation (5.25a), on en déduit que la densité de fonction est une Gaussienne donnée par :

$$f^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho_s^0 e^{-\frac{1}{2}\|u^0 - v\|^2}.$$

De plus, l'équation (5.25b) fournit :

$$V^0 = u^0.$$

Compte tenu de ce qui précède, il devient alors très facile de prendre les deux premiers moments de l'équation de Vlasov dans (5.26). On obtient les équations d'Euler compressibles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_s^0 + B \operatorname{div}(\rho_s^0 u^0) = 0 \\ \partial_t(\rho_s^0 u^0) + B \operatorname{div}_x(\rho_s^0 u^0 \otimes u^0) + B \nabla_x(\rho_s^0) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} (u^0 - v)f^1 + \int_{\mathbb{R}^3} u^1 f^0 dv - F \rho_s^0 \vec{k}. \end{cases} \quad (5.28)$$

Par ailleurs, les deux dernières équations de (5.26) donnent le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_w^0 + B \operatorname{div}(\rho_w^0 u^0) = 0, \\ \partial_t(\rho_w^0 u^0) + B \operatorname{div}_x(\rho_w^0 u^0 \otimes u^0) + B \nabla_x p^0 = 2E \left(\operatorname{div}(\Sigma^0 \cdot D(u^0)) \right. \\ \left. + \nabla(\lambda \operatorname{div}(u^0)) \right) + \int_{\mathbb{R}^3} (v - u^0)f^1 dv - \int_{\mathbb{R}^3} u^1 f^0 dv - F \rho \vec{k}. \end{cases} \quad (5.29)$$

Ensuite, en notant ϱ la quantité

$$\varrho = \rho_w^0 + \rho_s^0,$$

et en additionnant les systèmes (5.28) et (5.29), on aboutit à :

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + B \operatorname{div}(\varrho u^0) = 0, \\ \partial_t(\varrho u^0) + B \operatorname{div}_x(\varrho u^0 \otimes u^0) + B \nabla_x(p + \rho_s^0) = 2E \left(\operatorname{div}(\Sigma^0 \cdot D(u^0)) \right. \\ \left. + \nabla(\lambda(\varrho) \operatorname{div}(u^0)) \right) - F \varrho \vec{k}. \end{cases} \quad (5.30)$$

Remarque 5.2.5. En introduisant y la fraction volumique de sédiments, en multipliant le premier système par α et le second par $(1 - \alpha)$, en choisissant une « bonne loi de pression », p , et une équation de transport sur y , on aboutirait à un modèle de mélange. Cependant, par souci de simplicité, on a additionné les deux systèmes.

En écrivant :

$$\sqrt{\theta} u^0 = u, \quad \rho_f \varrho = \rho$$

et en multipliant l'équation de conservation de la masse du système (5.30) par $\frac{1}{\mathfrak{L}}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $\frac{\rho_f \sqrt{\theta}}{\mathfrak{L}}$, on obtient le système dans les variables physiques suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x P = 2 \left(\operatorname{div}(\Sigma^0 \cdot D(u)) \right. \\ \left. + \nabla(\lambda(\rho) \operatorname{div}(u)) \right) - g \rho \vec{k}. \end{cases} \quad (5.31)$$

où

$$P = p + \theta \rho_s$$

est la pression définie par p (5.10) et ρ_s (5.11). On appelle ce modèle, *modèle de mélange*.

Remarque 5.2.6.

- Compte tenu de la remarque précédente, la terminologie employée pour le modèle (5.31) est un abus de langage.
- En procédant à une analyse en couche mince, le terme ρ_s sera éliminé des équations (5.31).

5.3 Dérivation formelle d'un modèle de transport de sédiments

Dans cette section, on présente un modèle de transport de sédiments obtenu par une analyse asymptotique en couche mince et par moyennisation suivant la verticale.

5.3.1 Analyse asymptotique de type couche mince

En vue d'obtenir l'approximation hydrostatique du système (5.31), on introduit le paramètre d'échelle

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{L}}{L} = \frac{\mathcal{U}}{U}$$

où $\mathcal{U}$ est la vitesse caractéristique introduite à la Section 5.2.4 et U une vitesse caractéristique relative aux mouvements horizontaux. La hauteur caractéristique, notée $\mathcal{L}$ (déjà introduite à la Section 5.2.4) est supposée petite devant la longueur caractéristique L du domaine. On pose alors T le temps caractéristique tel que $T = \frac{L}{U}$.

⚠ Dans la suite de ce chapitre, on note

$$x = (x_1, x_2), \quad y = x_3, \quad u = (u_1, u_2), \quad \text{and } v = u_3$$

pour dissocier les composantes verticales des composantes horizontales.

On pose

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{T}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\mathcal{L}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\mathcal{U}}, \\ \tilde{h} &= \frac{h}{\mathcal{L}}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{\rho}_s = \frac{\rho_s}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{\mathcal{L}}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\mathcal{L}}, \\ \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}, \quad \tilde{\mu}_j = \frac{\mu_j}{\bar{\mu}_j}, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

les variables sans dimension représentant respectivement le temps, l'espace, la vitesse du fluide, la hauteur du fluide, la densité, la hauteur totale, la hauteur du fond et les différentes viscosités. Ensuite, on définit le nombre de Froude, noté F_r , le nombre de Reynolds associé à la viscosité μ_i ($i=1,2,3$), noté Re_i et le nombre de Reynolds associé à la viscosité λ , noté Re_λ sont donnés respectivement par :

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{g\mathcal{L}}}, \quad Re_i = \frac{\bar{\rho}UL}{\mu_i}, \quad Re_\lambda = \frac{\bar{\rho}UL}{\bar{\lambda}}. \quad (5.32)$$

Enfin, on introduit les quantités caractéristiques de friction $\bar{\mathfrak{K}}$ et de variation du fond $\bar{S}$ telles que :

$$\bar{S} = \varepsilon U \text{ et } \bar{\mathfrak{K}} = \varepsilon \bar{\rho} U.$$

Dans la suite, on pose $\bar{\rho} = \rho_f$.

Alors, le système (5.31) adimensionnel est :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{T} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \frac{U}{L} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\rho} \tilde{v}) = 0, \\ &\frac{\bar{\rho} U}{T} \partial_{\tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\bar{\rho} U^2}{L} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{u} \otimes \tilde{u}) + \frac{\bar{\rho} U \mathcal{U}}{\mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\rho} \tilde{v} \tilde{u}) + \nabla_{\tilde{x}} \left(\frac{g \bar{\rho} \mathcal{L}}{4L} \tilde{h} \tilde{\rho}^2 + \frac{\bar{\rho} \theta}{L} \tilde{\rho}_s \right) = \\ &\quad \frac{\bar{\mu}_1 U}{L^2} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\mu_1 D_{\tilde{x}}(\tilde{u})) + \frac{\bar{\mu}_2 U}{\mathcal{L}^2} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\mu}_2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}) + \frac{\bar{\mu}_2 \mathcal{U}}{L \mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\mu}_2 \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}) + \\ &\quad \frac{\bar{\lambda} U}{L^2} \nabla_{\tilde{x}} (\tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{u})) + \frac{\bar{\lambda} \mathcal{U}}{L \mathcal{L}} \nabla_{\tilde{x}} (\tilde{\lambda} \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}), \\ &\frac{\bar{\rho} \mathcal{U}}{T} \partial_{\tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{v}) + \frac{\bar{\rho} U \mathcal{U}}{L} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v}) + \frac{\bar{\rho} \mathcal{U}^2}{\mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\rho} \tilde{v}^2) + \partial_{\tilde{y}} \left(\frac{g \bar{\rho}}{4} \tilde{h} \tilde{\rho}^2 + \frac{\bar{\rho} \theta}{\mathcal{L}} \tilde{\rho}_s \right) = \\ &\quad -g \bar{\rho} \tilde{\rho} + \frac{\bar{\mu}_3 U}{L \mathcal{L}} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\mu}_3 \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}) + \frac{\bar{\mu}_3 \mathcal{U}}{L^2} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{\mu}_3 \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v}) + 2 \frac{\bar{\mu}_3 \mathcal{U}}{\mathcal{L}^2} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\mu}_3 \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}) \\ &\quad + \frac{\bar{\lambda} U}{L \mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}} (\tilde{u})) + \frac{\bar{\lambda} \mathcal{U}}{\mathcal{L}^2} \partial_{\tilde{y}} (\tilde{\lambda} \partial_{\tilde{y}} \tilde{v}). \end{aligned} \right. \quad (5.33)$$

Les conditions à la surface libre (5.14) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{p}\mathcal{L}}{L} \left(\tilde{p} + \tilde{\beta}\kappa - \tilde{p}_0 \right) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} - \frac{\bar{\mu}_1 U \mathcal{L}}{L^2} \tilde{\mu}_1 D_{\tilde{x}}(\tilde{u}) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} + \\ \frac{\bar{\mu}_2}{L} \left(\tilde{\mu}_2 \left(\frac{U}{\mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \frac{\mathcal{U}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v} \right) \right) - \frac{\bar{\lambda} U \mathcal{L}}{L^2} \tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{u}) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} \\ - \frac{\bar{\lambda} \mathcal{U}}{L} \tilde{\lambda} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{v}) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} = 0, \\ \tilde{p}(-\tilde{p} - \tilde{\alpha}\kappa + \tilde{p}_0) - \bar{\mu}_3 \left(\tilde{\mu}_3 \left(\frac{U}{L} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \frac{\mathcal{U}}{L^2} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v} \right) \right) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H} \\ + 2 \frac{\bar{\mu}_3 \mathcal{U}}{\mathcal{L}} \tilde{\mu}_3 \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} + \frac{\bar{\lambda} U}{L} \tilde{\lambda} \operatorname{div}_{\tilde{x}}(\tilde{u}) + \frac{\bar{\lambda} \mathcal{U}}{\mathcal{L}} \tilde{\lambda} \partial_{\tilde{y}}(\tilde{v}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.34)$$

où on a posé

$$\bar{p} = \frac{g\mathcal{L}\bar{\rho}}{4}.$$

Les conditions au fond (5.15) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\bar{\mu}_1 U \mathcal{L}}{L^2} \mu_1 \left(\left(1 + \left| \frac{\mathcal{L}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right|^2 \right) I_2 - \frac{\mathcal{L}^2}{L^2} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b}^t \right) D_{\tilde{x}}(\tilde{u}) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \\ + \mu_2 \left(\left(1 + \left| \frac{\mathcal{L}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right|^2 \right) I_2 - \frac{\mathcal{L}^2}{L^2} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b}^t \right) \left(\frac{U}{\mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \frac{\mathcal{U}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v} \right) \\ - \bar{\mu}_3 \mu_3 \left(\left(\frac{\mathcal{L} U}{L^2} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \frac{\mathcal{U} \mathcal{L}^2}{L^3} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v} \right) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} + 2 \frac{\mathcal{U} \bar{\mu}_3}{L} \mu_3 \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \\ = \left(1 + \left| \frac{\mathcal{L}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right|^2 \right)^{3/2} \bar{\mathcal{R}} U \left(\begin{array}{c} \mathcal{R}_1(\tilde{u}) \\ \mathcal{R}_2(\tilde{u}) \end{array} \right), \\ - \bar{\mu}_3 \mu_3 \left| \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right|^2 \left(\frac{\mathcal{L}^2 U}{L^3} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \frac{\mathcal{L}^3 \mathcal{U}}{L^2} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v} \right) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} + 2 \frac{\mathcal{L} \mathcal{U} \bar{\mu}_3}{L^2} \mu_3 \left| \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right|^2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{v} \\ + \bar{\mu}_2 \frac{\mathcal{L}}{L} \mu_2 \left(\frac{U}{\mathcal{L}} \partial_{\tilde{y}} \tilde{u} + \frac{\mathcal{U}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{v} \right) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \\ - \bar{\mu}_1 \frac{U \mathcal{L}^2}{L^3} \mu_1 \left(D_{\tilde{x}}(\tilde{u}) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \\ = \left(1 + \left| \frac{\mathcal{L}}{L} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} \right|^2 \right)^{3/2} \bar{\mathcal{R}} \mathcal{U} \mathcal{R}_3(\tilde{v}). \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Enfin, l'équation de la variation du fond (5.16) adimensionnelle est :

$$\frac{\mathcal{L}}{T} \partial_{\tilde{t}} \tilde{b} + \frac{U \mathcal{L}}{L} \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{b}) \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{b} - \mathcal{U} \tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{b}) = \bar{S} \tilde{S}. \quad (5.36)$$

En utilisant les nombres sans dimension donnés par (5.32), en omettant le *tilde*, en posant $\rho_p = \bar{\rho}$ et en multipliant l'équation de conservation de la masse du système (5.33) par T , l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sur u (5.33) par $\frac{T}{\bar{\rho}U}$, l'équation de la conservation

de la quantité de mouvement sur v (5.33) par $\frac{T}{\bar{\rho}\mathcal{U}}$, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \partial_y(\rho v u) + \nabla_x \left(\frac{h\rho^2}{4F_r^2} + \theta \frac{\mathcal{T}^2}{L^2} \rho_s \right) = \\ \frac{1}{Re_1} \operatorname{div}_x(\mu_1 D_x(u)) + \frac{1}{Re_2} \partial_y \left(\mu_2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y u + \nabla_x v \right) \right) + \frac{1}{Re_\lambda} \nabla_x(\lambda \operatorname{div}(u)) \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}_x(\rho u v) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_y \left(\frac{h\rho^2}{4\varepsilon^2 F_r^2} + \theta \frac{\mathcal{T}^2}{L^2} \rho_s \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{F_r^2} \rho \\ + \frac{1}{Re_3} \operatorname{div}_x \left(\mu_3 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y u + \nabla_x v \right) \right) + \frac{2}{\varepsilon^2 Re_3} \partial_y(\mu_3 \partial_y v) \\ + \frac{1}{\varepsilon^2 Re_\lambda} \partial_y(\lambda \operatorname{div}(u)) \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Remarque 5.3.1. Comme $\sqrt{\theta} \approx \mathcal{U}$ (c.f. Section 5.2.4) avec $\mathcal{U} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{T}}$, on en tire

$$\theta \frac{\mathcal{T}^2}{L^2} = \varepsilon^2 \text{ et } \theta \frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{L}^2} = 1.$$

En multipliant la première équation de (5.34) par $\frac{L}{\bar{p}\mathcal{L}}$ et la seconde par $\frac{1}{\bar{p}}$, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (p + \beta\kappa - p_0) \nabla_x H - \frac{1}{Re_1} \mu_1 D_x(u) \nabla_x H + \\ \frac{1}{Re_2} \left(\mu_2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y u + \nabla_x v \right) \right) - \frac{1}{\varepsilon Re_\lambda} \lambda \operatorname{div}_x(u) \nabla_x H \\ - \frac{1}{Re_\lambda} \lambda \partial_y(v) \nabla_x H = 0 \\ (-p - \alpha\kappa + p_0) - \frac{1}{Re_3} (\mu_3 (\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v)) \cdot \nabla_x H \\ + 2 \frac{1}{Re_3} \mu_3 \partial_y v + \frac{1}{Re_\lambda} \lambda (\operatorname{div}_x(u) + \partial_y(v)) = 0. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

De même, en multipliant la première équation de (5.35) par $\frac{L}{\bar{\rho}U^2\mathcal{L}}$ et la dernière par $\frac{1}{\bar{\rho}U^2}$, les conditions aux fond sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\mu_1}{Re_1} \left(\left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right) I_2 - \varepsilon^2 \nabla_x b \nabla_x b^t \right) D_x(u) \nabla_x b \\ + \frac{\mu_2}{Re_2} \left(\left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right) I_2 - \varepsilon^2 \nabla_x b \nabla_x b^t \right) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y u + \nabla_x v \right) \\ - \frac{\mu_3}{Re_3} ((\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v) \cdot \nabla_x b) \nabla_x b + 2 \frac{1}{Re_3} \mu_3 \partial_y v \nabla_x b \\ = \left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right)^{3/2} \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ -\frac{\mu_3}{Re_3} |\nabla_x b|^2 (\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v) \cdot \nabla_x b + 2\varepsilon^2 \frac{\mu_3}{Re_3} |\nabla_x b|^2 \partial_y v \\ + \frac{\mu_2}{Re_2} (\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v) \cdot \nabla_x b - \varepsilon^2 \frac{\mu_1}{Re_1} (D_x(u) \nabla_x b) \cdot \nabla_x b \\ = \varepsilon^2 \left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right)^{3/2} \mathfrak{K}_3(v). \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Finalement, en multipliant l'équation (5.36) par $\frac{T}{\mathcal{L}}$, on trouve :

$$\partial_t b + u(t, x, b) \cdot \nabla_x b - v(t, x, b) = \frac{\bar{S}}{\varepsilon U} S \quad (5.40)$$

5.3.2 Régime asymptotique

On se place dans le régime asymptotique suivant

$$\frac{\mu_i(\rho)}{Re_i} = \varepsilon^{i-1} \nu_i(\rho), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda(\rho)}{Re_\lambda} = \varepsilon^2 \gamma(\rho). \quad (5.41)$$

Ainsi, le système (5.37) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) + \partial_y v = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \partial_y(\rho v u) + \frac{1}{4F_r^2} \nabla_x(h\rho^2) + \varepsilon^2 \nabla_x \rho_s = \operatorname{div}_x(\nu_1(\rho) D(u)) \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon} \partial_y(\nu_2(\rho) \partial_y u) + \varepsilon \partial_y(\nu_2(\rho) \nabla_x v) + \varepsilon^2 \nabla_x(\nu_3(\rho) \operatorname{div}_x(u) + \varepsilon^2 \nabla_x(\nu_3(\rho) \partial_y v) \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}_x(\rho v u) + \partial_y(\rho v^2) + \frac{h}{4\varepsilon^2 F_r^2} \partial_y \rho^2 + \partial_y \rho_s = \frac{1}{\varepsilon^2 F_r^2} \rho + \varepsilon^2 \operatorname{div}_x(\nu_3(\rho) \nabla_x v) \\ \quad + \operatorname{div}_x(\nu_3(\rho) \partial_y u) + 2\partial_y(\nu_3(\rho) \partial_y v) + \partial_y(\nu_3(\rho) \partial_y v) + \partial_y(\nu_3(\rho) \operatorname{div}_x(u)). \end{array} \right. \quad (5.42)$$

En utilisant (5.41), les conditions à la surface libre (5.38) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (p + \beta\kappa - p_0) \nabla_x H - \mu_1 D_x(u) \nabla_x H + \left(\mu_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_y u + \varepsilon \nabla_x v \right) \right) \\ \quad - \varepsilon \gamma \operatorname{div}_x(u) \nabla_x H - \varepsilon^2 \gamma \partial_y(v) \nabla_x H = 0, \\ (-p - \alpha\kappa + p_0) - \varepsilon^2 \mu_3 (\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v) \cdot \nabla_x H \\ \quad + 2\varepsilon^2 \mu_3 \partial_y v + \varepsilon^2 \gamma (\operatorname{div}_x(u) + \partial_y(v)) = 0. \end{array} \right. \quad (5.43)$$

et les conditions au fond (5.39) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\nu_1 \left(\left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right) I_2 - \varepsilon^2 \nabla_x b \nabla_x b^t \right) \cdot D_x(u) \cdot \nabla_x b \\ \quad + \left(\left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right) I_2 - \varepsilon^2 \nabla_x b \nabla_x b^t \right) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_y u + \varepsilon \nabla_x v \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \mu_3 ((\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v) \cdot \nabla_x b) \nabla_x b + 2\varepsilon^2 \mu_3 \partial_y v \nabla_x b \\ \quad = \left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right)^{3/2} \left(\begin{array}{c} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{array} \right), \\ -\mu_3 |\nabla_x b|^2 (\varepsilon^2 \partial_y u + \varepsilon^4 \nabla_x v) \cdot \nabla_x b + 2\varepsilon^3 \mu_3 |\nabla_x b|^2 \partial_y v \\ \quad + \varepsilon \mu_2 (\partial_y u + \varepsilon^2 \nabla_x v) \cdot \nabla_x b - \varepsilon^2 \mu_1 (D_x(u) \nabla_x b) \cdot \nabla_x b \\ \quad = \varepsilon^2 \left(1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2 \right)^{3/2} \mathfrak{K}_3(v). \end{array} \right. \quad (5.44)$$

On suppose désormais que les quantités u , ρ , v , p et h admettent les développements asymptotiques par rapport à ε suivants : $u = u^0 + \varepsilon u^1$, $\rho = \rho^0 + \varepsilon \rho^1$, $v = v^0 + \varepsilon v^1$, $p = p^0 + \varepsilon p^1$ et $h = h^0 + \varepsilon h^1$. En les injectant dans le système (5.37) et dans les conditions aux limites (5.38)-(5.39), par identification suivant les puissances de ε , on en déduit :

À l'ordre ε^{-2} :

De l'équation (5.42), on en déduit

$$\frac{h}{4}\partial_y(\rho^0)^2 = -\rho^0. \quad (5.45)$$

Par conséquent, il vient :

$$h\partial_y\rho^0 = -2.$$

À l'ordre ε^{-1} :

De l'équation (5.42), on en tire

$$\partial_y(\nu_2(\rho)\partial_y u^0) = 0, \quad (5.46)$$

et de l'équation (5.43), on obtient :

$$\nu_2(\rho)\partial_y u^0 = 0. \quad (5.47)$$

Ainsi, des équations (5.46) et (5.47), on a $\partial_y u^0 = 0$. Autrement dit, u^0 est indépendant de la variable verticale y :

$$u(t, x, y) = u^0(t, x) + O(\varepsilon).$$

À l'ordre ε^0 :

Compte tenu de ce qui précède, à partir de l'équation (5.42), on écrit

$$\partial_t(\rho^0 u^0) + \operatorname{div}_x(\rho^0 u^0 \otimes u^0) + \partial_y(\rho v^0 u^0) + \frac{1}{4F_r^2} \nabla_x (h^0 (\rho^0)^2) = \operatorname{div}_x(\nu_1(\rho) D(u^0)) + \partial_y(\nu_2(\rho) \partial_y u^1) \quad (5.48)$$

et des conditions à la surface libre (5.43), on en déduit

$$\nu_2(\rho)\partial_y u^1 - \nu_1(\rho)D(u^0)\nabla H^0 = 0. \quad (5.49)$$

De même, à partir des conditions aux fonds (5.44), on écrit

$$\partial_t b^0 + u^0 \cdot \nabla b^0 - v^0 = S \quad (5.50)$$

et

$$\nu_2(\rho)\partial_y u^1 - \nu_1(\rho)D(u^0)\nabla b^0 = \mathfrak{K}(u). \quad (5.51)$$

Par conséquent, en omettant l'exposant 0 des quantités précédentes, le système (5.37) à l'ordre principal s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \partial_y(\rho v u) + \frac{1}{4F_r^2} \nabla_x(h\rho^2) = \operatorname{div}_x(\nu_1 D_x(u)) \\ \quad + \partial_y(\nu_2 \partial_y u^1), \\ h\partial_y \rho = -2. \end{cases} \quad (5.52)$$

En posant $\kappa = p_0 = 0$, les conditions à la surface libre se réécrivent, à l'ordre principal,

$$\begin{cases} -\nu_1 D_x(u) \nabla_x H + (\nu_2 \partial_y u^1) = 0 \\ p(\rho) = 0 \end{cases} \quad (5.53)$$

et les conditions au fond donnent les équations :

$$\begin{cases} -\nu_1 D_x(u) \nabla_x b + \nu_2 \partial_y u^1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ \nu_2 \partial_y u \cdot \nabla_x b = 0, \\ \partial_t b + u(t, x, b) \cdot \nabla_x b - v(t, x, b) = S. \end{cases} \quad (5.54)$$

5.3.3 Intégration verticale du modèle de mélange

Le modèle de transport de sédiments proposé est obtenu par moyennisation verticale des équations (5.52) (de la même manière qu'au Chapitre 1). À cet effet, on note, pour toute fonction f , la moyenne de f le long de la verticale $[b(t, x), H(t, x)]$ par :

$$h(t, x) \bar{f}(t, x) = \int_b^H f dy.$$

En intégrant l'équation $h \partial_y \rho = -2$ entre y et H , on obtient une équation de type hydrostatique suivante :

$$h \rho = 2(H - y).$$

À partir de l'équation $h \rho = 2(H - y)$, on a :

$$\int_b^H \rho dy = \frac{1}{h} \int_b^H h \rho dy = \frac{2}{h} \int_b^H (H - y) dy = h \quad (5.55)$$

et en particulier, la pression moyenne s'écrit :

$$\int_b^H h \rho^2 dy = \frac{4}{3} h^2. \quad (5.56)$$

Par suite, en utilisant

- la règle de Leibniz,
- les conditions aux limites (5.53)-(5.54) ,
- $u(t, x, y) = \bar{u}(t, x) + O(\varepsilon)$,
- l'équation (5.55),
- $S = 0$ (pour simplifier),

on obtient l'équation de la conservation de la masse :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h \bar{u}) = 0 \quad (5.57)$$

De même, en intégrant l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du système (3.24) pour $b \leq y \leq H$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \partial_t(h \bar{u}) + \operatorname{div}_x(h \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{3 F_r^2} \nabla_x(h^2) + \left(\rho u (\partial_t b + u \cdot \nabla_x b - w) \right)_{|y=b} \nabla_x b \\ & - \left(\rho u (\partial_t H + u \cdot \nabla_x H - w) \right)_{|y=H} \nabla_x H = \operatorname{div}_x \left(\int_b^H D(u - \bar{u}) dy + \overline{(\nu_1)} h D(\bar{u}) \right) \\ & + (\nu_2 \partial_y u^1 - \nu_1 D_x(u) \nabla_x b)_{|y=b} + (\nu_1 D_x(u) \nabla_x H - \nu_2 \partial_y u^1)_{|y=H}. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites (5.53)-(5.54) et le fait que $u = \bar{u} + O(\varepsilon)$, on obtient finalement :

$$\partial_t(h \bar{u}) + \operatorname{div}(h \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{3 F_r^2} \nabla h^2 = -\frac{h}{F_r^2} \nabla b + \operatorname{div}(h D(\bar{u})) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

De retour aux variables physiques, le modèle de transport est :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h \bar{u}) & = 0, \\ \partial_t(h \bar{u}) + \operatorname{div}(h \bar{u} \otimes \bar{u}) + g h \nabla \left(\frac{h}{3} + b \right) & = \operatorname{div}(h D(\bar{u})) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ \partial_t b + u \nabla_x b & = v. \end{cases} \quad (5.59)$$

Remarque 5.3.2.

- Les équations ci-dessus sont formellement proches de celles de Saint-Venant-Exner (5.1)-(5.2) pour un transport par charriage ou en suspension.
- Lorsque $S \neq 0$, il faut ajouter le terme source $-2S$ à l'équation de conservation de la masse et $-2uS$ à l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

En dépit, de la différence constatée entre les équations (5.59) et (5.1)-(5.2) i.e. les coefficients de pression $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{1}{2}$, de même que [103, 110], on a aussi des résultats de stabilités de solutions faibles.

5.4 Un premier exemple : le flux de transport diffusif de J-D. Zabsonré

Dans cette section, on considère le modèle (5.59), sans le terme de friction, avec le flux de transport diffusif introduit par Zabsonre *et al.* [110], que l'on modifie en introduisant les coefficients α, β . Précisons que dans [110], ces coefficients sont égaux à 1. Le modèle est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hu) & = 0 \\ \partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + gh \nabla \left(\frac{h}{3} + b \right) & = 2\nu \operatorname{div}(hD(u)) \\ \partial_t b + \operatorname{div}(\alpha hu |u|^k - \beta \nu \nabla b I) & = 0 \end{cases} \quad (5.60)$$

où I est la matrice identité. Le flux de transport solide est $u \nabla_x b - v = \operatorname{div}(\alpha hu |u|^k - \beta \nu \nabla b)$ où α et β satisfont les relations (5.63).

On adjoint au système (5.60), la condition initiale satisfaisant les régularités suivantes :

$$h_0 \in L^2(\Omega), \quad h|_{t=0} = h_0 \geq 0, \quad b|_{t=0} = b_0 \in L^2(\Omega), \quad hu|_{t=0} = m_0 \quad (5.61)$$

et

$$|m_0|^2 / h_0 \in L^1(\Omega), \quad \nabla \sqrt{h_0} \in L^2(\Omega)^2 \quad (5.62)$$

où $\Omega = \mathcal{T}^2$ désigne le tore. Alors, on a le résultat suivant :

Théorème 5.4.1. Soient α, β et $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$, $\delta = \delta(\beta)$ (des coefficients appelés de stabilité) tels que :

$$\begin{aligned} 0 &< \beta < 2, \alpha > 0 \\ \phi(\beta) &= \frac{2}{2-\beta} > 0, \\ \gamma(\alpha, \beta) &= 3\alpha\phi(\beta) > 0, \\ \delta(\beta) &= \phi(\beta) - 1 > 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Soit (h_n, u_n, b_n) une suite de solutions faibles de (5.60) avec (5.61)-(5.62), au sens suivant : $\forall k \in [0, 1/2]$:

- le système (5.60) est satisfait dans $(\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega))^4$ avec (5.61)-(5.62),
- l'inégalité d'énergie (5.64), l'inégalité d'entropie (5.66) et les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \sqrt{hu} &\in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2) & \sqrt{h} \nabla u &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^4) \\ h^{1/(k+2)} u &\in L^\infty(0, T; (L^{k+2}(\Omega))^2) & h/3 + b &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \nabla(h/3) + \nabla b &\in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) & \nabla \sqrt{h} &\in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2), \\ h^{1/k} D(u)^{2/k} &\in L^k(0, T; (L^k(\Omega))^4). \end{aligned}$$

Si $h_0^n \geq 0$ et la suite $(h_0^n, u_0^n, m_0^n) \rightarrow (h_0, u_0, m_0)$ converge dans $L^1(\Omega)$ alors, à une sous-suite près, (h_n, u_n, m_n) converge fortement vers une solution faible du système (5.60) et satisfait l'inégalité d'énergie (5.64) et l'inégalité d'entropie (5.66).

Estimations *a priori*

Les estimations nécessaires pour montrer la stabilité de solutions faibles sont obtenus classiquement via l'énergie et une entropie mathématique (par exemple, la BD entropie utilisé au Chapitre 3) :

- l'inégalité d'énergie est obtenue en multipliant l'équation de la conservation de la masse par u puis par intégration par parties.
- l'inégalité d'entropie est obtenue via une combinaison de l'équation de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement à l'aide d'un multiplicateur puis par intégration par parties.

Cependant, la démarche ci-dessus est insuffisante en raison de l'équation sur b , du coefficient $1/3$, α et β car ils introduisent des termes intégraux dont leur signe est inconnu.

Cependant, en combinant les inégalités qu'on obtient par la BD-entropie et l'inégalité d'énergie en utilisant le multiplicateur $u(1 + \gamma |u|^k)$ (pour un coefficient $\gamma(\alpha, \beta)$ satisfaisant les relations (5.63)), on obtient :

Propriétés 5.4.1. Soit (h, u, b) une solution régulière de (5.60) et des coefficients γ et δ vérifiant (5.63). Alors, on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{h |u|^2}{2} + \frac{\gamma(\alpha, \beta)}{k+2} h |u|^{k+2} + g\phi(\beta) \left(\sqrt{\frac{3}{2}}b + \sqrt{\frac{1}{6}}h \right)^2 + \delta(\beta) h \frac{|\psi|^2}{2} dx \\ & + 2\nu \int_{\Omega} h \left(1 + (1-2k) |u|^k \right) |D(u)|^2 + \delta(\beta) |A(u)|^2 dx \\ & + g\nu \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\sqrt{3\phi(\beta)\beta}b + \sqrt{2/3\delta(\beta)}h \right) \right|^2 dx \leq 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

où $\psi = u + 2\nu \nabla \ln h$.

Preuve de la Propriétés 5.4.1 :

On multiplie l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $u + \gamma u |u|^k$ et on utilise les équations portant sur h et b , puis on intègre par parties :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{h |u|^2}{2} + \frac{\gamma}{k+2} h |u|^{k+2} dx + 2\nu \int_{\Omega} h |D(u)|^2 - \gamma \operatorname{div}(hD(u)) \cdot u |u|^k dx \\ & + g \int_{\Omega} \partial_t h^2/6 + b \partial_t h + h\gamma/(3\alpha) \partial_t b + \gamma/(2\alpha) \partial_t b^2 dx \\ & + g\nu \int_{\Omega} \beta\gamma/(3\alpha) \nabla b \cdot \nabla h + \beta\gamma/\alpha |\nabla b|^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Puisque le signe de certains termes est inconnu dans (5.65), alors on introduit la BD-entropie. On obtient :

Lemme 5.4.1. Soit (h, u, b) une solution régulière de (5.60). Alors, l'égalité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h |\psi|^2 dx + \int_{\Omega} 2\nu |A(u)|^2 dx \\ & + \int_{\Omega} g/6 \partial_t h^2 + 2g\nu/3 |\nabla h|^2 + gb \partial_t h + 2g\nu \nabla b \cdot \nabla h dx = 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Preuve du Lemme 5.4.1 :

En prenant le gradient de l'équation de la conservation de la masse, puis en multipliant par 2ν et écrivant que $\nabla h = h\nabla \ln h$, on a

$$\partial_t (2\nu h \nabla \ln h) + \operatorname{div} (2\nu h \nabla \ln h \otimes u) + \operatorname{div} (2\nu h \nabla^t u) = 0 \quad (5.67)$$

Ensuite, en sommant l'équation (5.67) avec l'équation de la conservation de la quantité de mouvement de (5.60), on obtient l'équation :

$$\partial_t (h \psi) + \operatorname{div} (\psi \otimes hu) + h \nabla (h/3 + b) + 2\nu \operatorname{div} (hA(u)) \quad (5.68)$$

où $\psi := u + 2\nu \nabla \ln h$ est le BD multiplicateur et $2A(u) = \nabla u - \nabla^t u$ est tenseur de taux de vorticité. La BD-entropie est alors obtenue en multipliant l'équation précédente par ψ et par intégration par parties.

- On a :

$$\int_{\Omega} \partial_t (h \psi) + \operatorname{div} (\psi \otimes hu) \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h \frac{|\psi|^2}{2} \, dx, \quad (5.69)$$

- En remarquant que :

$$\int_{\Omega} 2\nu \operatorname{div} (hA(u)) \nabla \ln h \, dx = 0,$$

alors l'intégrale est réduite à

$$\int_{\Omega} 2\nu \operatorname{div} (hA(u)) u \, dx = 2\nu \int_{\Omega} h |A(u)|^2 \, dx, \quad (5.70)$$

- On a aussi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h \nabla h \psi \, dx &= \int_{\Omega} h \nabla hu \, dx + 2\nu \int_{\Omega} h \nabla h \nabla \ln h \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h^2/2 \, dx + 2\nu \int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx, \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h \nabla b \psi \, dx &= \int_{\Omega} h \nabla bu \, dx + 2\nu \int_{\Omega} h \nabla b \nabla \ln h \, dx \\ &= \int_{\Omega} b \partial_t h \, dx + 2\nu \int_{\Omega} \nabla b \cdot \nabla h \, dx. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Finalement, en rassemblant tous les résultats (5.69)–(5.72), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h \frac{|\psi|^2}{2} + g \frac{h^2}{6} \, dx + 2\nu \int_{\Omega} h |A(u)|^2 + g \frac{2\nu}{3} |\nabla h|^2 \, dx \\ + \int_{\Omega} b \partial_t h + 2\nu \nabla h \cdot \nabla b \, dx = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

■

Ensuite, en calculant (5.65) + δ (5.73) et en remarquant que :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (hD(u)) \cdot u |u|^k \, dx = - \int_{\Omega} h |u|^k |D(u)|^2 \, dx - k \int_{\Omega} (hD(u)u \cdot \nabla) u \cdot u |u|^{k-2} \, dx$$

et

$$\left| \int_{\Omega} (hD(u)u \cdot \nabla) u \cdot u |u|^{k-2} \, dx \right| \leq 2 \int_{\Omega} h |u|^k |D(u)|^2 \, dx,$$

on obtient l'inégalité (5.64) escomptée.

■

Preuve du Théorème 5.4.1 :

Gr ce à l'inégalité (5.64), le Théorème 5.4.1 est une conséquence directe du résultat principal de Zabsonré *et al.* [110].

■

5.5 Un deuxième exemple : le flux de transport de Grass

Si on suppose que la morphologie du fond évolue comme la surface libre, alors on obtient le modèle de Grass :

$$\nabla_x b - v = \operatorname{div}(hu).$$

Par conséquent, le modèle (5.59) s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + gh \nabla \left(\frac{h}{3} + b \right) &= 2\nu \operatorname{div}(hD(u)) - \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_1(u) \\ \mathfrak{K}_2(u) \end{pmatrix}, \\ \partial_t b + \operatorname{div}(hu) &= 0. \end{cases} \quad (5.74)$$

Ce dernier peut être réduit à seulement deux équations en remarquant que :

$$b(t, x) = h(t, x) - b_0(x) \quad (5.75)$$

pour une donnée b_0 . Ainsi, ce modèle est très proche du modèle mathématiquement étudié par Bresch *et al.* [29]. Dans ce dernier, ils prouvent l'existence de solutions sous des hypothèses de régularité sur $b_0 > 0$. On cite aussi les résultats de Toumbou *et al.* [103] où le terme visqueux $\operatorname{div}(hD(u))$ est remplacé par Δu .

En dépit du terme de pression $h^2/3$, si un terme de friction de la forme $r_0 u + r_1 u |u|$ (qu'on n'écrit pas par simplicité) est ajouté, le résultat d'existence de Bresch *et al.* [29] est encore vrai pour le modèle (5.74). En effet, on a l'égalité d'énergie suivante :

Propriétés 5.5.1. *Soit (h, u, b) une solution régulière de (5.74), alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h |u|^2 dx + g \frac{h^2}{6} + g \frac{b_0^2}{2} dx + 2\nu \int_{\Omega} h |D(u)|^2 dx \leq \int_{\Omega} g \frac{b_0^2}{2} dx \quad (5.76)$$

De plus, la BD-entropie fournit :

Propriétés 5.5.2. *Soit (h, u, b) une solution régulière de (5.74), alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} h |\psi|^2 + g \frac{h^2}{6} dx \\ & + \int_{\Omega} 2\nu |A(u)|^2 dx + 2g\nu \int_{\Omega} \frac{5}{3} |\nabla h|^2 \leq \int_{\Omega} g \frac{b_0^2}{2} + g\nu |\nabla b_0|^2 dx \end{aligned} \quad (5.77)$$

Par conséquent, il suffit de considérer $b_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pour pouvoir appliquer le résultat d'existence de Bresch *et al.* [29].

5.6 Perspectives

On a présenté une manière de dériver des équations de type Saint-Venant-Exner pour un transport de sédiments par charriage ou en suspension. Ce modèle a été formellement dérivé à partir de l'équation de Vlasov et du modèle de Navier-Stokes compressible anisotrope couplé par une pression barotrope non-homogène et par la force de trainée de Stokes.

Cependant, pour que cette dérivation soit complète, il faut définir une condition aux limites cinétiques pour pouvoir interpréter le terme S ajouté et ainsi, espérer modéliser un transport

de sédiments total. Dans la suite, un des objectifs principaux est donc de déterminer une telle condition et de considérer un modèle de mélange au sens des fractions volumiques.

Si initialement, on avait considéré les équations de Navier-Stokes incompressibles, alors on aurait obtenus directement les équations de Saint-Venant-Exner. Néanmoins, l'originalité de cette approche réside dans le choix de la loi de pression de type barotrope non-homogène $k(t, x)\rho^\gamma$. Il serait donc intéressant de comparer numériquement l'impact du coefficient $1/3$ avec les équations de Saint-Venant-Exner usuelles.

Par ailleurs, un modèle similaire pour le transport de sédiments en conduite fermée est facilement obtenu (non présenté ici). En effet, en suivant ce procédé, on l'obtient en prenant une loi de pression barotrope de coefficient $\gamma = 1$. À ce sujet, un article est en cours de préparation [42]. Il serait également très intéressant de voir si un couplage pour les écoulements en conduite fermée, comme pour les équations **PFS**, est possible.

Annexe A

Produits non-conservatifs

Le modèle **PFS** pour les écoulements mixtes en conduite fermée est constitué de termes source de la forme conservatifs et non-conservatifs. Pour pouvoir les décentrer aux interfaces, on les suppose constants par morceau. Ainsi, les produits non-conservatifs n'ont plus de sens mathématique.

Dans cette perspective, on a rappelle la définition proposé par Dal Maso *et al* [81]. On commence par définir un chemin :

Définition A.0.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ l'espace des états.

Un chemin Φ dans Ω est une famille de fonctions régulières $[0, 1] \times \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\Phi(0, \mathbf{W}_g, \mathbf{W}_d) = \mathbf{W}_g$ et $\Phi(1, \mathbf{W}_g, \mathbf{W}_d) = \mathbf{W}_d$,
- Pour tout partie A bornée de Ω , il existe k tel que $\forall s \in [0, 1], \forall (\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) \in A^2$:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(0, \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) \right| \leq k |\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_g|,$$

- Pour tout partie A bornée de Ω , il existe K tel que $\forall s \in [0, 1], \forall (\mathbf{V}_g^i, \mathbf{V}_d^i)_{i=1,2} \in A^2$:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, \mathbf{V}_g^1, \mathbf{V}_d^1) - \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, \mathbf{V}_g^2, \mathbf{V}_d^2) \right| \leq K (|\mathbf{V}_g^1 - \mathbf{V}_g^2| + |\mathbf{V}_d^1 - \mathbf{V}_d^2|).$$

Le résultat principal de Dal Maso *et al* [81] est alors :

Théorème A.0.1 (Dal Maso, LeFloch, Murat). Soit Φ un chemin au sens de la définition précédente. Soit $\mathfrak{U} \in BV((a, b), \mathbb{R}^N)$ et $\mathfrak{G} \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ une fonction localement bornée, i.e.

$$\forall X \subset \mathbb{R}^N \text{ bornée, } \exists C > 0; \forall \mathfrak{U} \in X, \forall x \in (a, b), |\mathfrak{G}(x, \mathfrak{U}(x))| \leq C.$$

Alors il existe une unique mesure de Borel μ sur (a, b) telle que :

1. Si $\mathfrak{U}$ est continu sur un ensemble ouvert $\mathcal{B}$ du segment (a, b) , alors

$$\mu(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{G}(x, \mathfrak{U}(x)) \frac{d}{dx} \mathfrak{U}(x) dx \quad (\text{A.1})$$

2. Si x^0 est un point de discontinuité pour $x \mapsto \mathfrak{U}(x)$, alors

$$\mu(\{x^0\}) = \left(\int_0^1 \mathfrak{G}(s, \Phi(s; \mathfrak{U}_-, \mathfrak{U}_+)) \partial_s (\Phi(s; \mathfrak{U}_-, \mathfrak{U}_+)) ds \right) \delta_{x^0} \text{ avec } \mathfrak{U}_{\pm} = \mathfrak{U}(x_{\pm}^0) \quad (\text{A.2})$$

où δ_{x^0} est la masse de Dirac au point x^0 .

Définition A.0.2. La mesure de Borel μ est appelé produit non-conservatif de $\mathfrak{G}$ par $\frac{d}{dx}\mathfrak{U}(x)$.

On la note $\mu = \left[\mathfrak{G}(x, \mathfrak{U}(x)) \frac{d}{dx} \mathfrak{U}(x) \right]_{\Phi}$.

Annexe B

La méthode des tuyaux équivalents

Dans cette partie, on rappelle le principe de la méthode des tuyaux équivalents proposé par Adamkowski [1] pour les écoulements en charge. Elle consiste à remplacer une conduite à section variable (convergente ou divergente) de longueur L par une conduite uniforme de même longueur de manière à conserver :

1. le travail des forces d'inertie lors de la coupure du débit,
2. le temps de propagation de l'onde sur la longueur du tuyau.

La propriété 1. permet de choisir une conduite équivalente de section équivalente S_{equiv} donnée par la relation :

$$S_{equiv} = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{S(x)}}$$

où $S(x)$ est la section de la conduite à géométrie variable.

La propriété 2. permet de définir la vitesse d'onde en charge équivalente. Elle est donnée par la formule suivante :

$$c_{equiv} = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{c(x)}}$$

où $c(x)$ est la vitesse d'onde en charge.

Dans le cadre des équations **PFS**, la vitesse d'onde en charge étant constante, on a immédiatement

$$c_{equiv} = c.$$

Annexe C

Lemme d'Aubin-Simon et injections de Sobolev

Dans cette partie, on rappelle quelques notions utiles qui nous ont servi pour démontrer le théorème de stabilité de solutions faibles pour les équations primitives compressibles simplifiées au chapitre 3. Le lecteur est renvoyé à, par exemple, [95, 43, 22].

On rappelle les injections suivantes :

Théorème C.0.2. *Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$.*

Pour $1 \leq r \leq +\infty$, on définit r^ par :*

$$r^* = \begin{cases} \frac{rd}{d-r} & \text{si } r < d, \\ \text{quelconque tel que } 1 \leq r^* < \infty & \text{si } r = d, \\ +\infty & \text{si } r > d. \end{cases}$$

1. *Pour $1 \leq r < +\infty$ et $1 \leq s \leq r^*$ alors*

$$W^{1,r}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$$

avec injection compacte si $1 \leq s < r^$.*

Par ailleurs, si $d < r \leq +\infty$, on a

$$W^{1,r}(\Omega) \subset\subset C^0(\overline{\Omega})$$

où $\subset\subset$ désigne l'injection compacte et $\subset$ l'injection continue.

2. • *Pour tout $q \in \left]1, \frac{d}{d-1}\right]$, on a*

$$L^1(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega).$$

• *Pour tout $t \in]1, d[$, on a*

$$L^t(\Omega) \subset W^{-1,t^*}(\Omega).$$

• *Pour tout $t \geq d$, on a*

$$L^t(\Omega) \subset W^{-1,\infty}(\Omega).$$

Théorème C.0.3. Soient $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ trois espaces de Banach. On suppose que l'injection de B_1 dans B_2 est continue et que l'injection de B_0 dans B_1 est compacte. Soient p, r tels que $1 \leq p, r \leq +\infty$. Pour tout $T > 0$, on note

$$E_{p,r} = \left\{ v \in L^p([0, T[, B_0), \frac{dv}{dt} \in L^r([0, T[, B_2) \right\}.$$

i) Si $p < +\infty$, l'injection de $E_{p,r}$ dans B_1 est compacte.

ii) Si $p = +\infty$ et $r > 1$, l'injection de $E_{p,r}$ dans $C^0([0, T[, B_1)$ est compacte.

Le point ii) est un corollaire du lemme d'Aubin-Simon.

On termine les rappels par le théorème de point fixe de Schauder :

Théorème C.0.4. Soient E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact alors toute application continue $f : K \rightarrow K$ possède un point fixe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Adamkowski. Analysis of transient flow in pipes with expanding or contracting sections. *Journal of Fluids Engineering*, 125(4) :716–722, 2003.
- [2] B. Alvarez-Samaniego and D. Lannes. Large time existence for 3D water-waves and asymptotics. *Invent. Math.*, 171(3) :485–541, 2008.
- [3] S.N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V.N. Monakov. *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostei [Boundary value problems of inhomogeneous fluid mechanics]*. “Nauka” Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1983.
- [4] J-A Astolfi. Contribution à l’étude du phénomène de cavitation : une approche expérimentale des conditions d’apparition et de développement de la cavitation. Technical report, HDR de l’Institut de Recherche de l’École Navale, 2003.
- [5] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comp.*, 25(6) :2050–2065, 2004.
- [6] M.J. Baines, A. Maffio, and A. Di Filippo. Unsteady 1-d flows with steep waves in plant channels : the use of Roe’s upwind tvd difference scheme. *Advances in Water Ressources*, 15(2) :89–94, 1992.
- [7] T. Barberon. *Modélisation mathématique et numérique de la cavitation dans les écoulements multiphasiques compressibles*. PhD thesis, Université de Toulon et du Var, 2002.
- [8] J.R. Blake, J.M. Boulton-Stone, and N.H. Thomas, editors. *Fluid Mechanics and its applications*. Kluwer Academic Publisher, Bubble Dynamics and Interface Phenomena, Proceedings of an IUTAM Symposium held in Birmingham, U.K. edition, 6-9 September 1993.
- [9] G. Blommaert. *Étude du comportement dynamique des turbines francis : contrôle actif de leur stabilité de fonctionnement*. PhD thesis, EPFL, 2000.
- [10] R. Botchorishvili, B. Perthame, and A. Vasseur. Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources. *Math. Comput.*, 72(241) :131–157, 2003.
- [11] F. Bouchut. An introduction to finite volume methods for hyperbolic conservation laws. In *GRIP—Research Group on Particle Interactions*, volume 15 of *ESAIM Proc.*, pages 1–17. EDP Sci., Les Ulis, 2005.
- [12] F. Bouchut, E.D. Fernández-Nieto, A. Mangeney, and P.-Y. Lagrée. On new erosion models of Savage-Hutter type for avalanches. *Acta Mech.*, 199(1-2) :181–208, 2008.
- [13] F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnau, B. Perthame, and J.-P. Vilotte. A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(6) :531–536, 2003.
- [14] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. A kinetic scheme for pressurised flows in non uniform closed water pipes. *Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, Vol. 31 :1–20, 2009.

- [15] C. Bourdarias, M. Ersoy, and S. Gerbi. A kinetic scheme for transient mixed flows in non uniform closed pipes : a global manner to upwind all the source terms. *To appear in J. Sci. Comp.*, 2010.
- [16] C. Bourdarias and S. Gerbi. An implicit finite volumes scheme for unsteady flows in deformable pipe-lines. In R. Herbin and D. Kröner, editors, *Finite Volumes for Complex Applications III : Problems and Perspectives*, pages 463–470. HERMES Science Publications, 2002.
- [17] C. Bourdarias and S. Gerbi. Etude et mise en oeuvre d’un schéma de type Roe pour les écoulements mixtes à surface libre et en charge. Technical report, EDF-CNEH et Université de Savoie, 2003. Rapport de recherche.
- [18] C. Bourdarias and S. Gerbi. A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes. *J. Comp. Appl. Math.*, 209(1) :109–131, 2007.
- [19] C. Bourdarias and S. Gerbi. A conservative model for unsteady flows in deformable closed pipe and its implicit second order finite volume discretisation. *Computers & Fluids*, 37(10) :1225–1237, 2008.
- [20] B. Boutin. *Étude mathématique et numérique d’équations hyperboliques non-linéaires : couplage de modèles et chocs non classiques*. PhD thesis, CEA de Saclay et Laboratoire J.-L. Lions, 2009.
- [21] M. Boutounet, L. Chupin, P. Noble, and J-P. Vila. Shallow water viscous flows for arbitrary topography. *Commun. Math. Sci.*, 6(1) :29–55, 2008.
- [22] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [23] D. Bresch. Shallow-water equations and related topics. In *Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. V*, Handb. Differ. Equ., pages 1–104. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009.
- [24] D. Bresch and B. Desjardins. Sur un modèle de Saint-Venant visqueux et sa limite quasi-géostrophique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(12) :1079–1084, 2002.
- [25] D. Bresch and B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238(1-2) :211–223, 2003.
- [26] D. Bresch and B. Desjardins. Sur la théorie globale des équations de Navier-Stokes compressible. *Journées équations aux dérivées partielles*, Exp. No. 3, 26 p, 2006.
- [27] D. Bresch, B. Desjardins, and D. Gérard-Varet. On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(2) :227–235, 2007.
- [28] D. Bresch, B. Desjardins, J.-M. Ghidaglia, and E. Grenier. Mathematical properties of the basic two fluid model. *To appear in Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2007.
- [29] D. Bresch, M. Gisclon, and C.K. Lin. An example of low Mach number effects for compressible flows with nonconstant density (height) limit. *M2AN*, 39(3) :477–486, 2005.
- [30] D. Bresch and G. Métivier. Anelastic Limits for Euler Type Systems. *In preparation*, 2010.
- [31] D. Bresch and P. Noble. Mathematical justification of a shallow water model. *Methods Appl. Anal.*, 14(2) :87–117, 2007.

-
- [32] T. Buffard, T. Gallouët, and J.M. Hérard. A sequel to a rough Godunov scheme. application to real gases. *Computers and Fluids*, 29(7) :813–847, 2000.
 - [33] G. Buntebarth. Zur Entwicklung des Begriffes Geophysik. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, 32 :95–109, 1981.
 - [34] H. Capart, X. Sillen, and Y. Zech. Numerical and experimental water transients in sewer pipes. *Journal of Hydraulic Research*, 35(5) :659–672, 1997.
 - [35] M.J. Castro, A.P. Milanés, and C. Parés. Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 17(12) :2055–2113, 2007.
 - [36] S. Cerne, S. Petelin, and I. Tiselj. Coupling of the interface tracking and the two-fluid models for the simulation of incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 171(2) :776–804, 2001.
 - [37] M. H. Chaudhry, S.M. Bhallamudi, C.S. Martin M., and Naghash. Analysis of Transient Pressures in Bubbly, Homogeneous, Gas-Liquid Mixtures. *ASME, Journal of Fluids Engineering*, 112(2) :225–231, 1990.
 - [38] J. A. Cunge, F. M. Holly, and A. Verwey. Practical aspects of computational river hydraulics. *Pitman Publishing Limited, London, London, U.K.*, 1980.
 - [39] J.A. Cunge. Modèle pour le calcul de la propagation des crues. *La Houille Blanche*, 3 :219–223, 1971.
 - [40] J.A. Cunge and M. Wegner. Intégration numérique des équations d’écoulement de Barré de Saint Venant par un schéma implicite de différences finies. *La Houille Blanche*, 1 :33–39, 1964.
 - [41] A. Decoene, L. Bonaventura, E. Miglio, and F. Saleri. Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations for natural river hydraulics. *Methods Appl. Anal.*, 14(2) :87–117, 2007.
 - [42] M. Ersoy and T. Ngom. Dérivation formelle des équations de Saint-Venant-Exner en surface libre. *In preparation*, 2010.
 - [43] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
 - [44] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. The finite volume method. In P. Ciarlet and J.L. Lions, editors, *Handbook of numerical analysis*, pages 713–1020. North Holland, 2000.
 - [45] I. Faille and E. Heintze. A rough finite volume scheme for modeling two-phase flow in a pipeline. *Computers & Fluids*, 28(2) :213–241, 1999.
 - [46] A. M. Ferreiro. *Development of post-process techniques of hydrodynamics flow, modelization of sediment transport problems and numerical simulation through finite volume techniques*. PhD thesis, Seville, 2006.
 - [47] J-P. Franc, F. Avellan, B. Belhadji, J-Y. Billard, L. Briançon-Marjollet, D. Fréchou, D-H. Fruman, A. Karimi, J-L. Kueny, and J-M. Michel. *La cavitation : mécanismes physiques et aspects industriels*. Presses Universitaires de Grenoble, 1995.
 - [48] M. Fuamba. Contribution on transient flow modelling in storm sewers. *Journal of Hydraulic Research*, 40(6) :685–693, 2002.
 - [49] S. Fujukawa, M. Okuda, T. Akamatsu, and T. Goto. Non-equilibrium vapour condensation on a shock-tube endwall behind a reflected shock wave. *J. Fluid. Mech.*, 183 :293–324, 1987.

- [50] T. Gallouët, J.M. Hérard, and N. Seguin. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers and Fluids*, 32(4) :479–513, 2003.
- [51] P. Garcia-Navarro, F. Alcrudo, and A. Priestley. An implicit method for water flow modelling in channels and pipes. *Journal of Hydraulic Research*, 32(5) :721–742, 1994.
- [52] P. Garcia-Navarro and M.E Vasquez. On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Comp. & Fluids*, 29(8) :951–979, 2000.
- [53] B. V. Gatapov and A. V. Kazhikhov. Existence of a global solution to one model problem of atmosphere dynamics. *Siberian Mathematical Journal*, 46(5) :805–812, 2005.
- [54] J.-F Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102, 2001.
- [55] L. Gosse. A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Math. Mod. Meth. Appl. Sc.*, 11(2) :339–365, 2001.
- [56] L. Gosse and A.Y. LeRoux. Un schéma-équilibre adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(5) :543–546, 1996.
- [57] T. Goudon, , P-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes Equations. I. Light particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1495–1515, 2004.
- [58] A.J. Grass. Sediment transport by waves and currents. Technical report, SERC London Cent. Mar. Technol. Report No. FL29, 1981.
- [59] J.M. Greenberg and A.Y. LeRoux. A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1) :1–16, 1996.
- [60] J.M. Greenberg, A.Y. LeRoux, R. Baraille, and A. Noussair. Analysis and approximation of conservation laws with source terms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(5) :1980–2007, 1997.
- [61] M.A. Hamam and A. McCorquodale. Transient conditions in the transition from gravity to surcharged sewer flow. *Can. J. Civ. Eng.*, 9(2) :189–196, 1982.
- [62] A. Harten, P.D. Lax, and B. Van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(1) :35–61, 1983.
- [63] T. Hibiki and M. Ishii. One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimesaa. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46(25) :4935–4948, 2003.
- [64] T. Hibiki and M. Ishii. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer, New York, 2006. With a foreword by Lefteri H. Tsoukalas.
- [65] S. Jin. A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35(4) :631–645, 2001.
- [66] Th. Katsaounis, B. Perthame, and C. Simeoni. Upwinding sources at interfaces in conservation laws. *Applied Mathematics Letters*, 17(3) :309–316, 2004.
- [67] F. Kerger, P. Archambeau, S. Erpicum, B. J. Dewals, and M. Pirotton. Improved one-dimensional numerical simulation of transient mixed flow in water pipe. In *Proceedings of 4th Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Engineering Liege, Belgium.*, 2008.
- [68] F. Kerger, P. Archambeau, S. Erpicum, B. J. Dewals, and M. Pirotton. Simulation numérique des écoulements mixtes hautement transitoires dans les conduites d’évacuation des eaux. *La Houille Blanche*, 5 :159–166, 2009.

-
- [69] N. E. Kochin. On simplification of the equations of hydromechanics in the case of the general circulation of the atmosphere. *Trudy Glavn. Geofiz. Observator.*, 4 :21–45, 1936.
 - [70] A. Kurganov and D. Levy. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 36(3) :397–425, 2002.
 - [71] Y. Lecoffre. *La cavitation : traqueurs de bulles*. Hermes, 1994.
 - [72] T.G. Leighton. Derivation of the rayleigh-plesset equation in terms of volume. Technical report, UK, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, 2007.
 - [73] R.J. LeVêque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm. *J. Comput. Phys.*, 146(1) :346–365, 1998.
 - [74] R.J. LeVêque and M. Pelanti. A class of approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes. *J. Comput. Phys.*, 172(2) :572–591, 2001.
 - [75] C-D. Levermore, M. Oliver, and Edriss S. Titi. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana University Mathematics Journal.*, 45(2), 1996.
 - [76] J. Li and A. McCorquodale. Modeling mixed flow in storm sewers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(11) :1170–1179, 1999.
 - [77] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. ii. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 229(1781) :317–345, 1955.
 - [78] J.L. Lions, R. Temam, and S. Wang. New formulations for the primitive equations for the atmosphere and applications. *Nonlinearity*, 5(2) :237–288, 1992.
 - [79] F. Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European Journal of Mechanic. B, Fluids*, 26(1) :49–63, 2007.
 - [80] N. Masmoudi and L. Saint Raymond. From the Boltzmann Equation to the Stokes-Fourier System in a Bounded Domain. *Communications on pure and applied mathematics*, 56(9) :1263–1293, 2003.
 - [81] G. Dal Maso, P. G. Lefloch, and F. Murat. Definition and weak stability of nonconservative products. *J. Math. Pures Appl.*, 74(6) :483–548, 1995.
 - [82] A. Mellet and A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(1-3) :431–452, 2007.
 - [83] E. Meyer-Peter and R. Müller. Formula for bed-load transport. Technical report, Rep. 2nd Meet. Int. Assoc. Hydraul. Struct. Res., 39–64, 1948.
 - [84] S. Mochon. An analysis of the traffic on highways with changing surface conditions. *Mathematical Modelling*, 9(1) :1–11, 1987.
 - [85] T. Ngom and M. Sy. Derivation and stability study of a rigid lid bilayer model. *Submitted*, 2010.
 - [86] P. Orenaga. Un théorème d’existence de solutions d’un problème de shallow water. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 130(2) :183–204, 1995.
 - [87] J. Pedlowski. *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd Edition, Springer-Verlag, New-York, 1987.
 - [88] B. Perthame and C. Simeoni. A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo*, 38(4) :201–231, 2001.

- [89] B. Perthame and C. Simeoni. Convergence of the Upwind Interface Source method for hyperbolic conservation laws. In *In Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications, Ninth International Conference on Hyperbolic Problems, CalTech, Pasadena*, pages 61–78, 2003.
- [90] P.I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations Research*, 4(1) :42–51, 1956.
- [91] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43(2) :357–372, 1981.
- [92] A. Y. Le Roux and M. N. Le Roux. Convergence d’un schéma à profils stationnaires pour les équations quasi linéaires du premier ordre avec termes sources. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(7) :703–706, 2001.
- [93] J. Sainte Marie and M.O. Bristeau. Derivation of a non-hydrostatic shallow water model ; Comparison with Saint-Venant and Boussinesq systems. Technical Report RR-6451, INRIA, 2008.
- [94] C. Savary. *Transcritical transient flow over mobile beds, boundary conditions treatment in a two-layer shallow water model*. PhD thesis, Louvain, 2007.
- [95] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146 :65–96, 1987.
- [96] C.S.S. Song. Two-phase flow hydraulic transient model for storm sewer systems. In *Second international conference on pressure surges*, pages 17–34, Bedford, England, 1976. BHRA Fluid engineering.
- [97] C.S.S. Song, J.A. Cardle, and K.S. Leung. Transient mixed-flow models for storm sewers. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 109(11) :1487–1503, 1983.
- [98] V.L. Streeter, E.B. Wylie, and K.W. Bedford. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, 1998.
- [99] R. Temam. Navier-Stokes equations. pages xiv+408, 2001. Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition.
- [100] R. Temam and M. Ziane. *Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics*. North-Holland, Amsterdam, 2004.
- [101] I. Tiselj and S. Petelin. Modelling of two-phase flow with second-order accurate scheme. *J. Comput. Phys.*, 136(2) :503–521, 1997.
- [102] E. F. Toro. Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 338(1649) :43–68, 1992.
- [103] B. Toubou, D-Y Le Roux, and A. Sene. An existence theorem for a 2-D coupled sedimentation shallow water model. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 344 :443–446, 2007.
- [104] M.-H. Tseng. Verification of 1-d transcritical flow model in channels. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)*, 23(5) :654–664, 1999.
- [105] D.C. Wiggert. Transient flow in free surface, pressurized systems. *Journal of the Hydraulics division*, 98(1) :11–27, 1972.
- [106] D.C. Wiggert and M.J. Sundquist. Fixed-grid characteristics for pipeline transients. *Journal of the Hydraulics division*, 103(12) :1403–1416, 1977.
- [107] V. Winckler. Logiciel belier4.0. Notes de principes. Technical report, EDF-CIH, Le Bourget du Lac, France, 1993.
- [108] E.B. Wylie and V.L. Streeter. *Fluid Transients*. McGraw-Hill, New York, 1978.

- [109] E.B. Wylie and V.L. Streeter. *Fluid transients in systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [110] J-D. Zabsonré, C. Lucas, and E. Fernández-Nieto. An energetically consistent viscous sedimentation model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(3) :477–499, 2009.

INDEX

B		V	
BD-entropie	138, 153	Vitesse terminale de Stokes	202, 203
C			
Cavitation			
équation de Rayleigh-Plesset	169		
équilibre quasi-statique de Blake	170		
érosion de	168		
définition de la	167		
germes de	167		
les bulles isolées	168		
les poches de	168		
les tourbillons de	168		
nombre de	166		
E			
Écoulement			
à surface libre	5–10, 12, 24, 25, 30, 31, 35		
en charge	5–10, 24, 35		
mixte	5, 6, 9, 32, 33, 35		
Équation			
d'Exner	195		
de Vlasov	196, 197, 200, 201, 204, 215		
Équations			
de mélange	196, 197, 205, 216		
de Saint-Venant-Exner	195		
d'Allievi	7–9, 24		
de Navier-Stokes compressibles anisotropes ..	136, 138, 139, 196–199, 215		
de Saint-Venant	5–10, 16, 22–24, 26, 30, 32, 35, 44, 46, 134, 137, 138, 174, 176, 195, 196		
en charge	9, 24, 26, 28–30, 32, 33, 35, 178		
intermédiaires	136, 138, 144, 151		
Primitives Compressibles	134		
Primitives Compressibles simplifiées ..	136–138, 142		
F			
Fente de Preissmann	6, 7, 24, 35		
L			
Loi de Manning-Strickler	24, 28, 77, 116		
Loi de pression non-homogène	197, 199, 215, 216		
N			
Nombre de Rouse	196, 203		
T			
Temps terminale de Stokes	202		
Test de la double rupture de barrage	95, 107		
Test de Wiggert	76, 105, 116		