Université du Sud - Toulon - Var
ISITV - 1$^{\text{ère}}$ année Marine
Mehmet Ersoy

Méthode des différences finies
Travaux Dirigés II /Travaux Pratiques

1 Instabilités

Exercice 1.
Soit $\lambda > 0$ donné. On considère le problème de Cauchy

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = -\lambda u(t),\ t > 0 \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce problème numériquement, on se donne une subdivision régulière

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_M = T$$

en posant $t_n = n\Delta t$ où

$$\Delta t = \frac{T - t_0}{M}.$$

On pose $u_0 = 1, T = 10$ et $\lambda = 1$. Programmer le schéma d'Euler explicite et implicite. Montrer numériquement les résultats obtenues lors de la première séance de TD.

2 Dissipation et dispersion numérique

On considère l'équation de transport linéaire à coefficient constant :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_t + c \cdot u_x = 0, x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega. \end{array} \right.$$

On pose $\Omega = [0, 10]$ le domaine spatiale, $[0, 10]$ le domaine temporelle et $c = 1$. Nous appliquerons des conditions de sortie libre (à savoir $u_0^n = u_1^n$ et $u_{N+1}^n = u_N^n$ pour tout n.) Soit N un entier et

$$\Delta x = \frac{10}{N+1}$$

le pas de discrétisation spatiale. Soit M un entier et

$$\Delta t = \frac{10}{M}$$

le pas de discrétisation temporel. On note

$$x_i = i\Delta x, \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1 \quad \text{ et } t_n = n\Delta t, \quad 0 \leqslant n \leqslant M.$$

On cherche $u_0^n, u_1^n \ldots, u_{N+1}^n$ tels que u_i^n soit proche de $u(t_n, x_i)$ quand Δx et Δt sont suffisamment petit. On suppose $c > 0$.

A ce effet, on considère les schémas numériques suivants :

– le schéma explicite décentré vers l'amont

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

– le schéma “leap frog ” (saute mouton)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Exercice 2.

1. Pour le schéma schéma décentré vers l'amont :
   (a) montrer qu'il est au moins d'ordre 1 en temps et en espace.
   (b) montrer qu'il est stable si et seulement si $\nu = c\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$.
   (c) Écrire l'équation modifiée et en déduire la nature de la diffusion numérique.
2. Pour le schéma schéma leap frog :
   (a) montrer qu'il est au moins d'ordre 2 en temps et en espace.
   (b) montrer qu'il est stable si et seulement si $\nu = c\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$.
   (c) Écrire l'équation modifiée et en déduire la nature de la diffusion numérique.
3. Programmer ces deux schémas et l'appliquer à une donnée de la forme :

$$u_0(x) = e^{-10(x-5)^2}$$

et

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Tracer la solution exacte et les solutions approchées pour différents temps. Conclure.

3 Traitement des conditions aux limites

3.1 Conditions de Dirichlet

On considère le problème aux limites suivants (de solution analytique $u(x) = \dfrac{e^{2Vx} - 1}{e^{2V} - 1}$)

$$(3) \qquad \begin{cases} -u_{xx} + Vu_x = 0, x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Soit N un entier et

$$h = \frac{1}{N+1}$$

le pas de discrétisation spatiale. On note

$$x_i = ih, \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1.$$

On cherche $u_0, u_1 \ldots, u_{N+1}$ tels que u_i soit proche de $u(x_i)$ quand h est suffisamment petit.

Exercice 3.

1. Si on choisit une différence finie centrée, montrer que $u_0, u_1 \ldots, u_{N+1}$ satisfait

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + V\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 1 \end{cases}$$

2. Si on choisit une différence finie décentrée amont, montrer que $u_0, u_1 \dots, u_{N+1}$ satisfait

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + V\dfrac{u_i - u_{i-1}}{h} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 1 \end{cases}$$

3. Si on choisit une différence finie décentrée aval, montrer que $u_0, u_1 \dots, u_{N+1}$ satisfait

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + V\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 1 \end{cases}$$

4. En notant

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, B_h \in \mathbb{R}^N,$$

montrer que les systèmes précédent s'écrivent sous la forme

$$A_h U_h = B_h.$$

5. Application numérique (c.f. 2K0c)

On considère le problème aux limites suivants (de solution analytique $u(x) = (1-x)e^x$)

$$(7) \qquad \begin{cases} -u_{xx} + c(x)u(x) = f(x), x \in (0,1) \\ u(0) = 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

avec

$$c(x) = x \quad f(x) = (1 + 2x - x^2)e^x.$$

Soit N un entier et

$$h = \frac{1}{N+1}$$

le pas de discrétisation spatiale. On note

$$x_i = ih, \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1.$$

On cherche $u_0, u_1 \dots, u_{N+1}$ tels que u_i soit proche de $u(x_i)$ quand h est suffisament petit.

Exercice 4.

1. Montrer que $u_0, u_1 \dots, u_{N+1}$ satisfait

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\ u_0 = 1 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

2. En notant

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, B_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

montrer que le système précédent s'écrit sous la forme

$$A_h U_h = B_h.$$

3. Application numérique (c.f. 2K0c)

3.2 Conditions mixtes

On considère de nouveau l'équation (7) et on change la condition aux limites $u(0) = 1$ par $u'(1) = \alpha$.

Exercice 5.

1. A l'aide d'une approximation d'ordre 1, montrer qu'on a :

$$U_{N+1} - U_N = \alpha h$$

puis procéder aux modifications nécessaires dans le système matriciel $A_h U_h = B_h$.

2. A l'aide d'une approximation d'ordre 2, montrer qu'on a :

$$\frac{2u_N - 2u_{N+1}}{h^2} + C_{N+1} f_{N+1} = f(x_{N+1}) - 2\frac{\alpha}{h}$$

puis procéder aux modifications nécessaires dans le système matriciel $A_h U_h = B_h$. (indication : nous introduirons si nécessaire une valeur fictive en x_{N+2}).

3. Nous fixons $c(x) = f(x) = \alpha = 1$. Dans ce cas la solution exacte est donnée par :

$$u(x) = 1 + \frac{1}{e^{-1} + e} e^x - \frac{1}{e^{-1} + e} e^{-x}.$$

Comparer ces deux méthodes (notamment autour de $x = 1$) avec la solution exacte pour différentes valeurs de N. Conclure.

4 Un problème bidimensionnel : équation de la chaleur

On considère une plaque rectangulaire dont 3 côtés sont maintenus à la température 0°C, le quatrième étant maintenu à la température $T = 100$°C. On cherche la température d'état stationnaire $T(x, y)$ en tout point de la plaque. On est donc amené à résoudre

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} -\Delta T = 0, x \in (0, a) \times (0, b) \\ T(0, y) = T(a, y) = T(x, 0) = 0 \text{ et } T(x, b) = 100. \end{cases}$$

Soit M, N deux entiers et

$$\Delta x = \frac{a}{N+1}, \quad \Delta y = \frac{b}{M+1} \quad \text{ et } h := \max(\Delta x, \Delta y).$$

On note

$$x_i = i\Delta x, \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1 \quad \text{ et } y_j = j\Delta y, \quad 0 \leqslant j \leqslant N+1.$$

On cherche

$$T_{i,j} \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1 \quad \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant N+1$$

tels que $T_{i,j}$ soit proche de $T(x_i, y_j)$ quand h est suffisament petit.

Exercice 6.

1. Montrer que $\{T_{i,j}\}_{i,j}$ satisfait

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \dfrac{-T_{i-1,j} + 2T_{i,j} - T_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{-T_{i,j-1} + 2T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant M \\ T_{0,j} = T_{N+1,j} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant M+1 \\ T_{i,0} = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1 \\ T_{i,M+1} = 100, \quad 0 \leqslant i \leqslant N+1 \end{cases}$$

2. En notant

$$T_j = \begin{pmatrix} T_{0,j} \\ T_{1,j} \\ \vdots \\ T_{N,j} \\ T_{N+1,j} \end{pmatrix}$$

montrer que (10) s'écrit sous la forme

$$A_h T_h = B_h$$

où A_h est une matrice tridiagonale par bloc

$$A_h = \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \dots & 0 & C & B \end{pmatrix} \text{ avec } B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta y^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta y^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta y^2} \end{pmatrix}$$

3. Application numérique (c.f. 2K0c)